

Wisselstromen

- § 1 Effectieve waarden
- § 2 Basiseigenschappen van een spoel en een condensator
- § 3 Weerstand, spoel en condensator bij harmonisch variërende signalen
- § 4 Harmonisch variërende signalen optellen
- § 5 Impedantie van serie- en parallelschakelingen
- § 6 Vermogen bij harmonische signalen
- § 7 Complexe getallen
- § 8 Complexe impedantie
- § 9 Filters

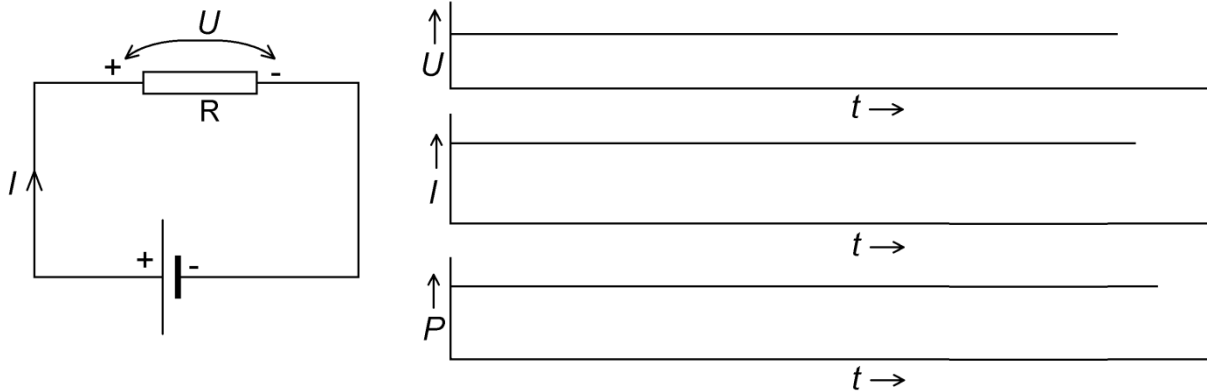
Benodigde voorkennis

Elektriciteit (deel 2)	Paragraaf 1 t/m 8
Elektronica	Paragraaf 4 t/m 6
Magnetisme	Geheel
Trillingen en geluid wiskundig	Paragraaf 1 t/m 3

§ 1 Effectieve waarden

Vermogen in een weerstand bij gelijkspanning

In de onderstaande figuur is een weerstand met (constante) weerstandswaarde R op een bron aangesloten die een gelijkspanning levert. In de diagrammen daarnaast zijn de spanning U over de weerstand, de stroom I door de weerstand en het vermogen P in de weerstand als functie van de tijd t weergegeven.



Het vermogen volgt volgens de volgende formule uit de spanning en de stroom.

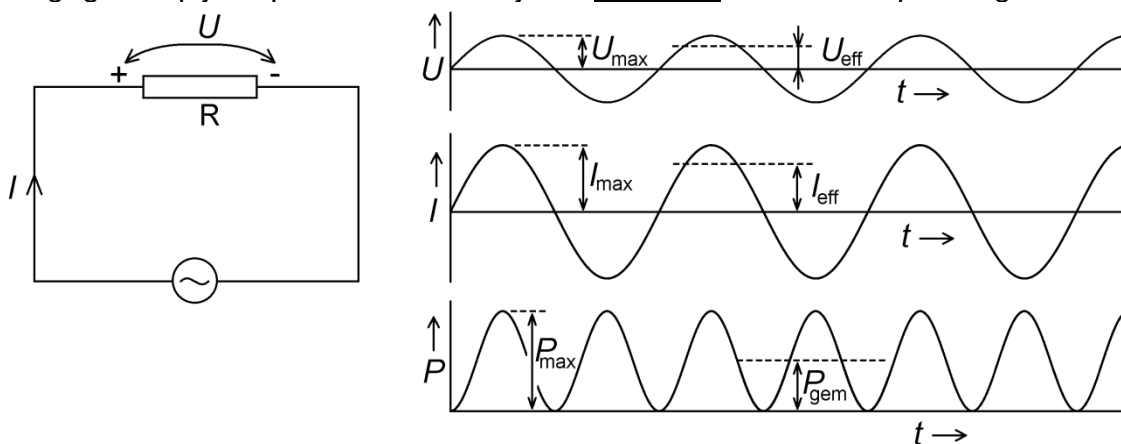
$$P = U \cdot I$$

Dit verband kan met $U = I \cdot R$ herschreven worden als:

$$P = U^2 / R \quad \text{en} \quad P = I^2 R$$

Vermogen in een weerstand bij een sinusvormige wisselspanning

In de onderstaande figuur is een weerstand op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning levert. In de diagrammen daarnaast zijn weer de spanning, stroom en vermogen als functie van de tijd weergegeven. Merk op dat de stroom niet steeds in de richting van de pijl loopt en de spanning niet steeds de polariteit heeft die in de figuur is aangegeven met een plus- en een minteken. De aangegeven pijl en polariteit horen bij een positieve stroom en spanning.



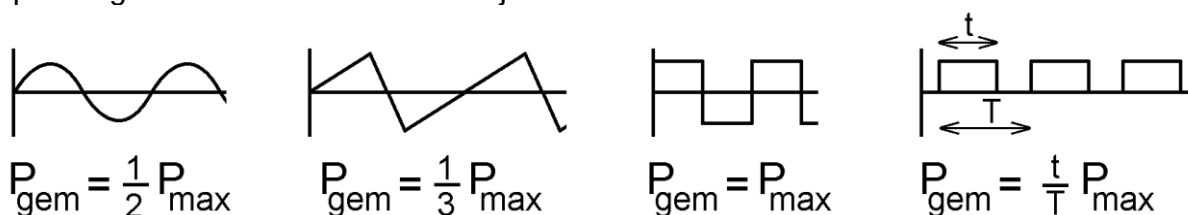
Zoals uit de bovenste twee diagrammen blijkt, keren de spanning en de stroom op dezelfde momenten van teken om. De spanning en stroom zijn dus beide positief of beide negatief. Dit betekent dat het vermogen bij een weerstand altijd positief (of nul) is. Anders gezegd: de weerstand ontvangt steeds energie en geeft nooit energie terug aan de bron.

In de bovenste twee diagrammen is de maximale waarde van de spanning en van de stroom aangegeven met $U_{\max}$ en met $I_{\max}$. Ook is in de diagrammen de zogenoemde effectieve spanning U_{eff} en de effectieve stroom I_{eff} aangegeven. Deze komen later in deze paragraaf aan bod.

In het onderste diagram zijn zowel het maximum vermogen $P_{\max}$ als het (in de tijd) gemiddelde vermogen P_{gem} aangegeven. Bij een sinusvormige spanning en stroom is het gemiddelde vermogen precies de helft van het maximum vermogen

Vermogen bij verschillende soorten wisselspanning

In de onderstaande diagrammen zijn vier soorten wisselspanning weergegeven. Hierbij staat steeds langs de verticale as de spanning of de stroom en langs de horizontale as de tijd. Onder de diagrammen staat de verhouding tussen het gemiddelde vermogen P_{gem} en het maximum vermogen $P_{\max}$ dat aan een weerstand geleverd wordt. Het maximum vermogen wordt geleverd op de tijdstippen waarbij de spanning en de stroom maximaal zijn.



Het eerste diagram betreft een sinusvormige wisselspanning. Zoals we al eerder zagen, is hierbij het gemiddelde vermogen de helft van het maximum vermogen. Het tweede diagram betreft een driehoeksspanning. In het derde en vierde diagram zijn blokspanningen weergegeven. Merk op dat bij het derde diagram het aan de weerstand geleverde vermogen steeds gelijk is aan het maximum vermogen.

Effectieve waarde van een wisselspanning en een wisselstroom

We maken onderscheid tussen enerzijds de topwaarden $U_{\max}$ en $I_{\max}$ van de spanning en de stroom en anderzijds de 'effectieve' waarden U_{eff} en I_{eff} van de spanning en de stroom. We definiëren deze laatste twee als volgt.

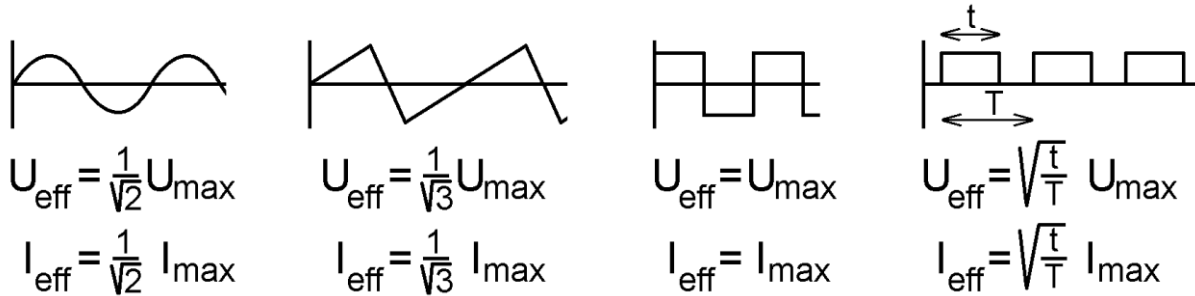
De effectieve waarde van de wisselspanning is de waarde die een gelijkspanning zou moeten hebben om aan dezelfde weerstand gemiddeld in de tijd een even groot vermogen te leveren.

De effectieve waarde van de wisselstroom is de waarde die een gelijkstroom zou moeten hebben om aan dezelfde weerstand gemiddeld in de tijd een even groot vermogen te leveren.

Volgens deze definities geldt dus:

$$P_{gem} = \frac{U_{eff}^2}{R} \quad \text{en} \quad P_{gem} = I_{eff}^2 R$$

De hierboven gegeven vier diagrammen met verschillende soorten wisselspanning zijn hieronder opnieuw gegeven. Onder de diagrammen is de bijbehorende verhouding tussen de effectieve spanning U_{eff} en de maximum spanning U_{max} gegeven en ook tussen de effectieve stroom I_{eff} en de maximum stroom I_{max} .



Zoals we kunnen zien, zijn de verhoudingsfactoren voor het vermogen gelijk aan het kwadraat van de verhoudingsfactoren voor de spanning (en van de stroom). Dit is als volgt te bewijzen.

$$\left. \begin{aligned} P_{gem} &= \frac{U_{eff}^2}{R} \\ P_{max} &= \frac{U_{max}^2}{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P_{gem}}{P_{max}} = \frac{U_{eff}^2}{U_{max}^2}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{gem} &= I_{eff}^2 R \\ P_{max} &= I_{max}^2 R \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{P_{gem}}{P_{max}} = \frac{I_{eff}^2}{I_{max}^2}$$

Getallenvoorbeeld

Een spanningsbron levert een sinusvormige wisselspanning met een amplitude van 10 V. De effectieve spanning bedraagt dan $(1/\sqrt{2}) \cdot 10 \text{ V} = 7,1 \text{ V}$

Opmerkingen

1)

De effectieve spanning (of effectieve stroom) is een soort denkbeeldige gelijkspanning (of gelijkstroom). In de bovenstaande diagrammen wordt de zogenoemde 'momentane' spanning of stroom tegen de tijd uitgezet. Die horen bij afzonderlijke tijdstippen.

2)

De effectieve waarde wordt ook wel de rms-waarde genoemd (van 'root mean square').

3)

Als van een sinusvormige wisselspanning de spanning wordt gegeven zonder verdere specificatie, wordt meestal de effectieve waarde bedoeld.

Voorbeeld van een opgave

De elektriciteitsvoorziening in woonhuizen levert een harmonisch variërende spanning met een effectieve waarde van 230 V. Een straalkachel met een weerstand van 53 Ω wordt op het stopcontact aangesloten.

- Bereken de topwaarde van de spanning.
- Bereken het aan de straalkachel geleverde (gemiddelde) vermogen.
- Bereken op twee manieren de effectieve stroom.

Oplossing

a. $U_{\max} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} = 1,41 \cdot 230 \text{ V} = 325 \text{ V}$

b. $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{230^2}{53} = 998 \text{ W}$

c.

Manier 1

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R} = \frac{230}{53} = 4,3 \text{ A}$$

Manier 2

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{998}{53}} = 4,3 \text{ A}$$

Opgaven bij § 1

Opgave 1

Wat is het verschil tussen de momentane spanning en de effectieve spanning?

Opgave 2

Een spanningsbron levert een harmonisch variërende spanning met een amplitude van 30 V. Een weerstand van $15\ \Omega$ wordt op de spanningsbron aangesloten.

a.

Bereken de effectieve waarde van de spanning.

b.

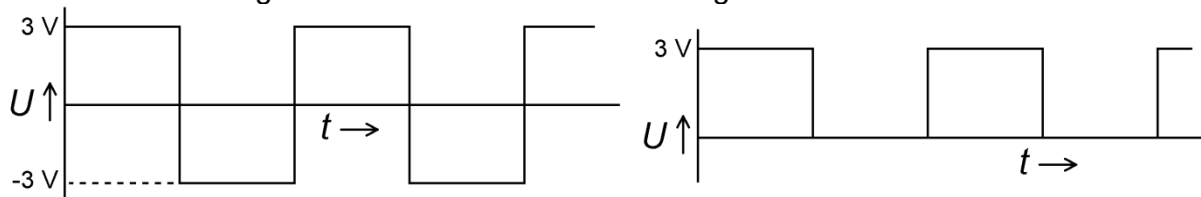
Bereken het aan de weerstand geleverde vermogen.

Opgave 3

Op een bron die een harmonisch variërende spanning levert, wordt een weerstand van $22\ \Omega$ aangesloten. De bron levert een vermogen van 33 W aan de weerstand. Bereken de maximale waarde van de stroom.

Opgave 4

Een spanningsbron (signaalgenerator) levert eerst een blokspanning die afwisselend de waarden -3 V en +3 V aanneemt. Daarna levert de bron een blokspanning die afwisselend de waarden 0 V en 3 V aanneemt. Binnen één periode duren beide waarden even lang. Zie de onderstaande twee diagrammen.



a.

Leg uit hoe groot de effectieve spanning van de eerste blokspanning is.

b.

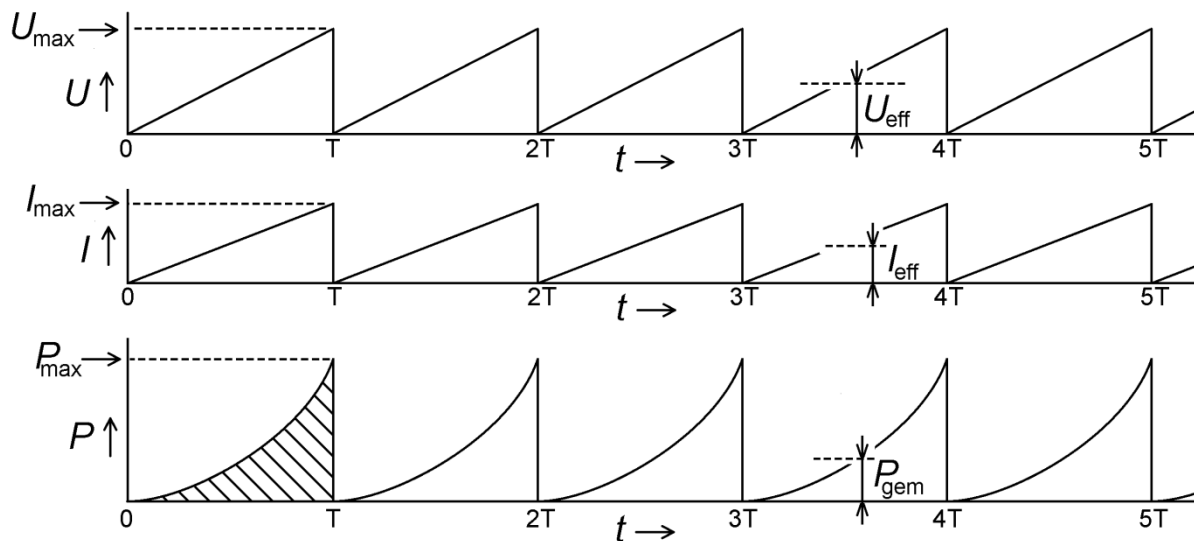
Leg uit dat het gemiddelde vermogen (geleverd aan een weerstand) van de tweede blokspanning gelijk is aan de helft van het maximale vermogen.

c.

Hoe groot is de effectieve spanning van de tweede blokspanning?

Opgave 5

Hieronder zijn drie diagrammen getekend. In het bovenste diagram is een 'driehoeksspanning' getekend. De periode van de driehoeksspanning is T . Binnen een periode verloopt de spanning lineair met de tijd. In het tweede diagram is de bijbehorende stroom getekend in het geval dat een weerstand op de spanningsbron is aangesloten. In het derde diagram is het door de bron afgegeven vermogen als functie van de tijd weergegeven.



In het bovenste diagram is $U_{\max}$ de maximale spanning en U_{eff} de effectieve spanning. Op dezelfde manier zijn in het tweede diagram de maximale stroom $I_{\max}$ en de effectieve stroom I_{eff} aangegeven. In het onderste diagram zijn het maximale vermogen $P_{\max}$ en het gemiddelde vermogen P_{gem} aangegeven.

In het onderste diagram heeft het gearceerde gebied een oppervlakte van $(1/3) \cdot P_{\max} \cdot T$.

a.

Geef het verband tussen het gemiddelde vermogen P_{gem} en het maximale vermogen $P_{\max}$.

b.

Geef het verband tussen de effectieve spanning U_{eff} en de maximale spanning $U_{\max}$.

c.

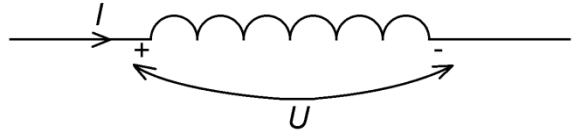
Geef het verband tussen de effectieve stroom I_{eff} en de maximale stroom $I_{\max}$.

§ 2 Basiseigenschappen van een spoel en een condensator

Spoel: verband tussen spanning en stroom

In de figuur hiernaast is het schakelschema van een spoel afgebeeld.

De spanning over de spoel is U en de stroom door de spoel is I . De zelfinductie van de spoel is L . De stroom wordt positief gerekend als hij in de richting van de pijl gaat; in tegengestelde richting is de stroom negatief. De spanning wordt positief gerekend als zijn polariteit overeenkomt met het plus- en minteken in de figuur. Bij omgekeerde polariteit is de spanning negatief.



Het verband tussen de (gemiddelde) U en I wordt gegeven door $U = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}$.

In het limietgeval waarin tijdsinterval Δt oneindig klein wordt, wordt de formule:

$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

Bij een constante gelijkstroom door de spoel is het quotiënt dI/dt gelijk aan nul en is de spanning over de spoel dus nul (aangenomen dat de weerstand van de spoel nul is). Als de stroom in de getekende richting groter wordt, heeft de spanning over de spoel een polariteit zoals die in de figuur is aangegeven.

Condensator: verband tussen spanning en stroom

In de figuur hiernaast is het schakelschema van een condensator afgebeeld. De spanning over de condensator is U en de stroom 'door' de condensator is I . De capaciteit C van een condensator is gedefinieerd als:

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Hierin is Q de lading op de platen (eigenlijk $+Q$ op de ene plaat en $-Q$ op de andere plaat). Het verband tussen Q en I is:

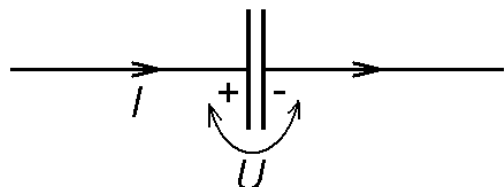
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

In het limietgeval waarin tijdsinterval Δt oneindig klein wordt, wordt dit:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Als we hierin de formule voor de capaciteit C substitueren, krijgen we:

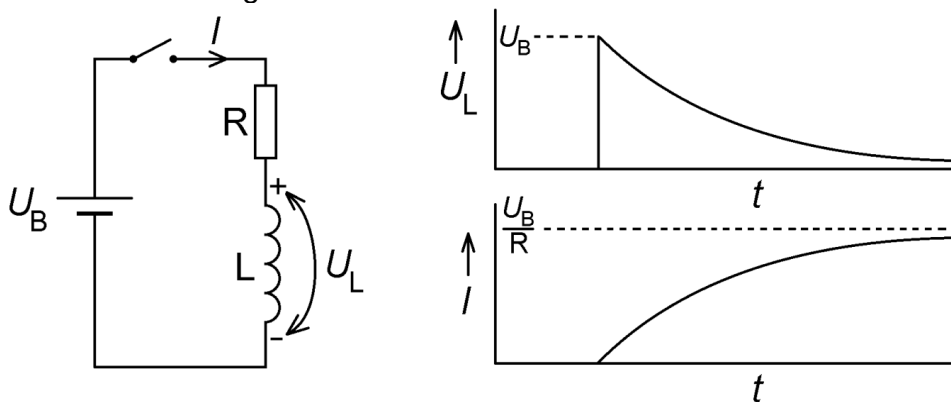
$$I = C \cdot \frac{dU}{dt}$$



Deze formule lijkt veel op die van een spoel, maar de rol van spanning en stroom zijn omgewisseld. Bij een constante gelijkspanning over de condensator is het quotiënt dU/dt gelijk aan nul en is de stroom door de condensator dus nul. Als de spanning in de getekende richting groter wordt, heeft de stroom door de condensator een richting zoals die in de figuur is aangegeven.

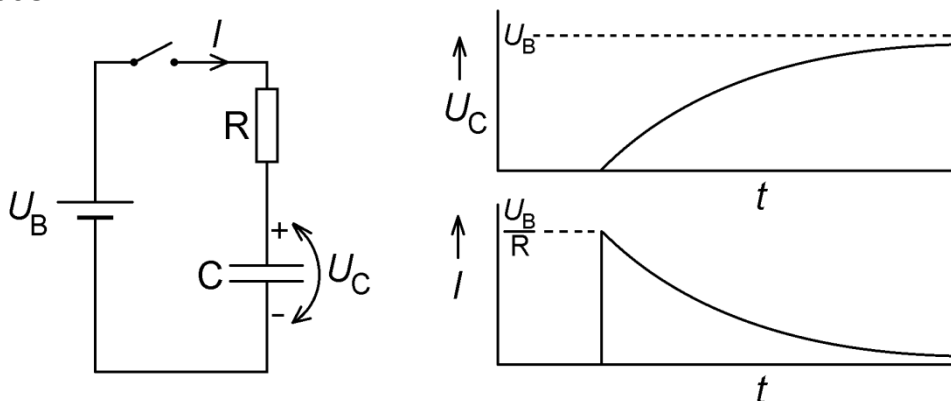
Spanning- en stroomveranderingen bij een spoel

Een spoel verzet zich tegen snelle stroomveranderingen. Dit blijkt onder andere uit het experiment dat in de onderstaande figuur is weergegeven. Spoel L en weerstand R zijn op een spanningsbron met gelijkspanning U_B aangesloten. Zolang de schakelaar open is, zijn zowel de spanning U_L over als de stroom I door de spoel nul. Als de schakelaar gesloten wordt, springt de spanning over de spoel direct naar de bronspanning en gaat daarna geleidelijk naar nul. De stroom door de spoel neemt slechts geleidelijk toe en gaat uiteindelijk naar de waarde U_B/R . Kortom: geen snelle stroomveranderingen dus.



Stroom- en spanningsveranderingen bij een condensator

Een condensator verzet zich tegen snelle spanningsveranderingen. Dit blijkt onder andere uit het experiment dat in de onderstaande figuur is weergegeven. Een ongeladen condensator C en weerstand R zijn op een spanningsbron met gelijkspanning U_B aangesloten. Zolang de schakelaar open is, zijn zowel de spanning U_C over als de stroom I door de condensator nul. Als de schakelaar gesloten wordt, springt de stroom door de condensator direct naar de waarde U_B/R en gaat daarna geleidelijk naar nul. De spanning over de condensator neemt slechts geleidelijk toe en gaat uiteindelijk naar de waarde U_B . Kortom: geen snelle spanningsveranderingen dus.



De stroom door een spoel onderbreken

Stel dat een stroomkring een spoel bevat waar een stroom doorheen gaat. Als je met een schakelaar de stroom door de spoel verbreekt, wordt de spanning over de spoel even heel hoog (theoretisch oneindig hoog) en kan je bij de schakelaar zelfs een

vlamboom zien. Dit kun je begrijpen als je naar de formule $U = L \cdot \frac{dI}{dt}$ kijkt. De

stroomdaling gebeurt in zeer korte tijd zodat het differentiaalquotiënt dI/dt zeer groot is (absoluut gezien). De spanning over de spoel is daarmee ook zeer groot. Dankzij deze hoge spanning loopt er nog heel even stroom door de lucht tussen de contactpunten van de schakelaar.

Je kunt ook naar het afgegeven vermogen van een spoel kijken. Je kunt bewijzen dat voor de opgeslagen energie E in een spoel geldt:

$$E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2.$$

Merk op dat de energie alleen van de stroom door de spoel afhangt en niet van de spanning. Als de stroom in zeer korte tijd naar nul gaat, gaat E ook in zeer korte tijd naar nul. Het door de spoel geleverde vermogen, dus de afgegeven energie per eenheid van tijd, is dan dus even zeer groot.

Een geladen condensator kortsluiten

Als je een geladen condensator kortsluit, is de kortsluitstroom heel hoog (theoretisch oneindig hoog). Dit kun je begrijpen als je naar de formule $I = C \cdot \frac{dU}{dt}$ kijkt. De

spanningsdaling gebeurt in zeer korte tijd zodat het differentiaalquotiënt dU/dt zeer groot is. De stroom is daarmee ook zeer groot.

Ook nu kun je naar het door de condensator afgegeven vermogen kijken. Je kunt bewijzen dat voor de opgeslagen energie E in een condensator geldt:

$$E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2.$$

Merk op dat de energie alleen van de spanning over de condensator afhangt en niet van de stroom. Als de spanning in zeer korte tijd naar nul gaat, gaat E ook in zeer korte tijd naar nul. Het door de condensator geleverde vermogen is dan dus even zeer groot.

Samenvatting

1)

Een spoel verzet zich tegen snelle veranderingen in de stroom.

Als de stroom door een spoel wordt onderbroken, wordt de spanning over de spoel even heel groot.

2)

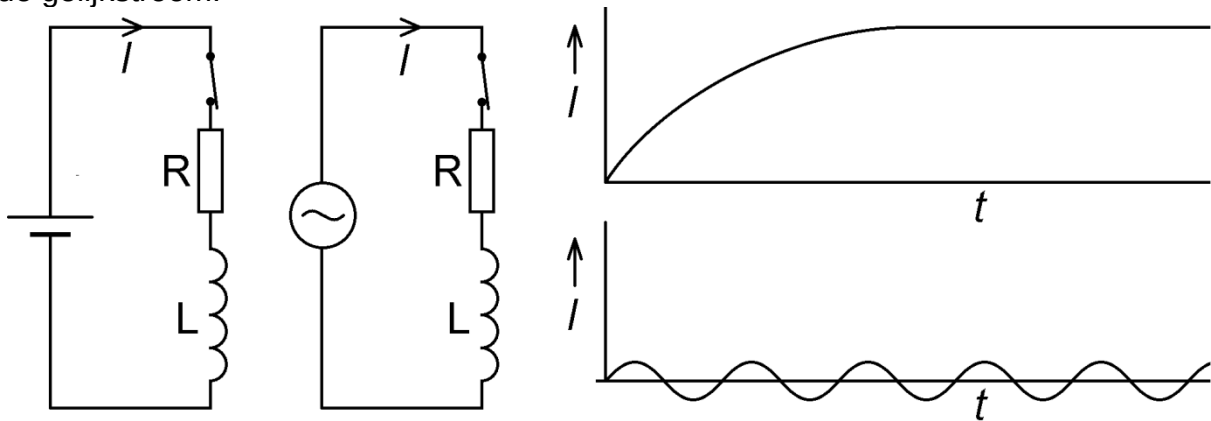
Een condensator verzet zich tegen snelle veranderingen in de spanning.

Als een geladen condensator wordt kortgesloten, wordt de kortsluitstroom even heel groot.

Opgaven bij § 2

Opgave 1

Een smoorspoel wordt meestal gebruikt om gelijkstroom door te laten en wisselstroom te onderdrukken. De onderstaande twee schakelingen zijn identiek behalve dat de ene spanningsbron een gelijkspanning levert en de andere een wisselspanning waarvan de effectieve waarde gelijk is aan de eerder genoemde gelijkspanning. Rechts is het verloop van de stroom in beide gevallen weergegeven nadat de schakelaar gesloten is. Leg uit dat de wisselstroom lang niet zo groot is als de gelijkstroom.



Opgave 2

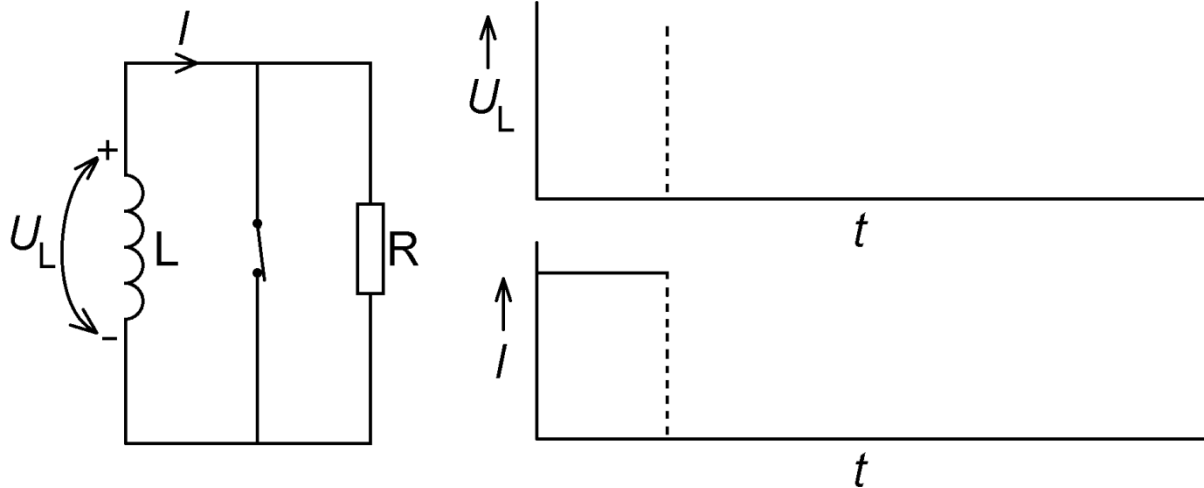
Leg uit waarom in elektronische schakelingen condensatoren vaak worden ingezet om spanningsfluctuaties tegen te gaan.

Opgave 3

Als je een werkende stofzuiger uitzet door de stekker uit het stopcontact te trekken, zie je vaak een vonk in het stopcontact. Geef daar een verklaring voor.

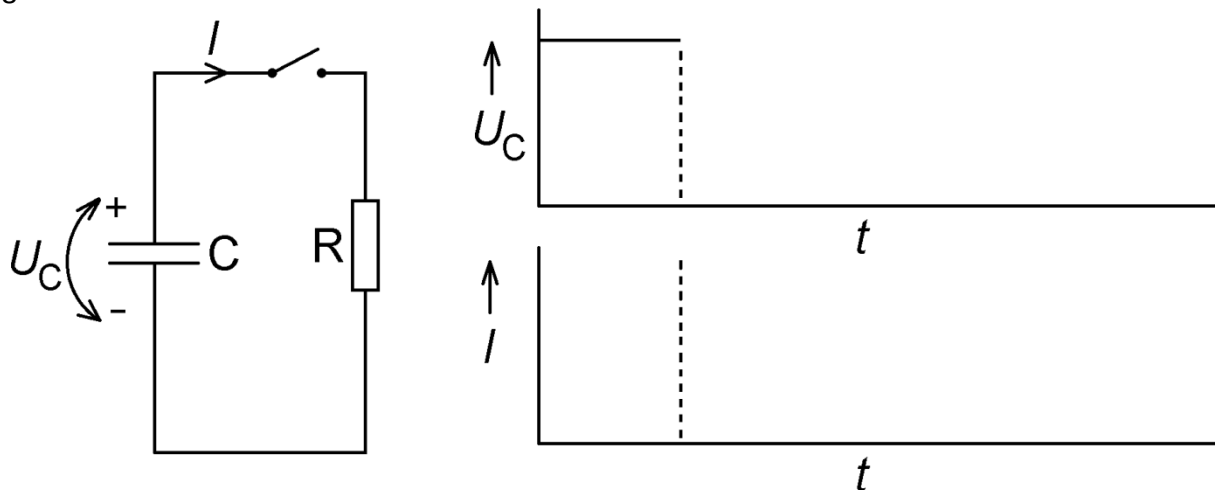
Opgave 4

In de onderstaande schakeling is de schakelaar gesloten en loopt er een constante stroom door de weerstandsloze spoel L en de schakelaar (vraag je niet af hoe die stroom daar ontstaan is). De spanning over de spoel is nul. Op een bepaald moment wordt de schakelaar geopend en gaat de stroom door weerstand R lopen. Schets in de diagrammen het verloop van de spanning over en de stroom door de spoel. De verticale stippellijnen geven het moment aan waarop de schakelaar geopend wordt.



Opgave 5

In de onderstaande schakeling is de condensator geladen. Op een bepaald moment wordt de schakelaar gesloten en ontlad de condensator zich over weerstand R . Schets in de diagrammen het verloop van de spanning over en de stroom door de condensator. De verticale stippellijnen geven het moment aan waarop de schakelaar gesloten wordt.



Opgave 6

In de schakeling van opgave 4 staat de schakelaar parallel aan de spoel en de weerstand. Welke grootheid zou zeer groot worden als de schakelaar in serie zou staan?

In de schakeling van opgave 5 staat de schakelaar in serie met de condensator en de weerstand. Welke grootheid zou zeer groot worden als de schakelaar parallel zou staan?

§ 3 Weerstand, spoel en condensator bij harmonisch variërende signalen

Hoekfrequentie

In deze en in de volgende paragrafen wordt veelvuldig gebruik gemaakt van het begrip hoekfrequentie ω (spreek uit 'omega'). Deze volgt uit de frequentie f volgens:

$$\omega = 2\pi \cdot f.$$

Impedantie (definitie)

We kunnen een gewone weerstand ('ohmse' weerstand), een spoel en een condensator opvatten als een stroomgeleidend systeem. Als de spanning over zo'n systeem harmonisch in de tijd varieert, verandert de stroom door dit systeem ook harmonisch. We introduceren nu de grootheid 'impedantie' die aangeeft hoe moeilijk de wisselstroom door het stroomgeleidende systeem loopt bij een gegeven wisselspanning.

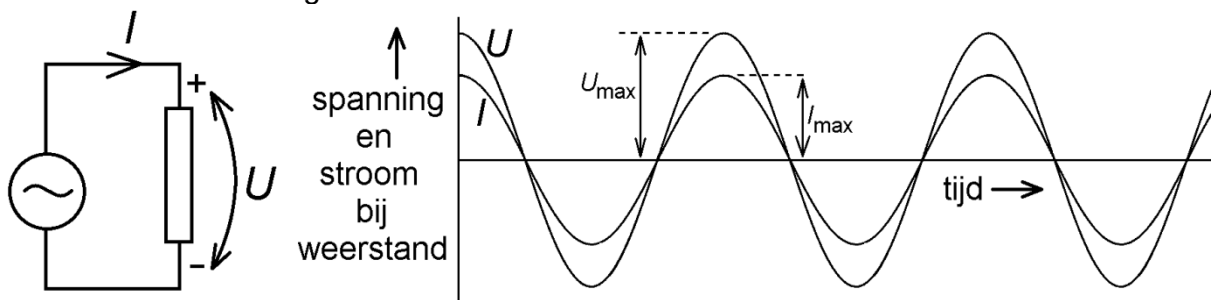
Per definitie verstaan we onder de impedantie het quotiënt van de topwaarden (amplitudes) van de wisselspanning en de wisselstroom. Het symbool voor impedantie is Z en haar eenheid is ohm. Hiervoor geldt dus:

$$Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$$

Hierna gaan we deze formule gebruiken bij a) een weerstand, b) een spoel en c) een condensator.

Weerstand

In de volgende beschouwing sluiten we een weerstand (of beter: 'ohmse' weerstand) aan op een bron die een harmonisch variërende spanning levert. Zie de onderstaande linker figuur.



In het diagram (rechts) zijn de spanning over en de stroom door de weerstand als functie van de tijd getekend. Bij een weerstand zijn de momentane spanning en de momentane stroom evenredig met elkaar. Volgens de wet van Ohm geldt immers:

$$U = R \cdot I.$$

Voor de topwaarden krijgen we dan automatisch:

$$U_{\max} = R \cdot I_{\max}$$

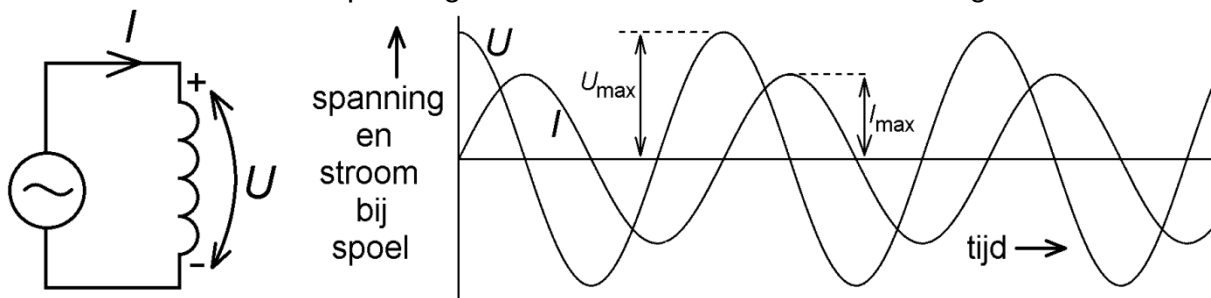
De impedantie van een weerstand is dus gelijk aan zijn weerstandswaarde R . In tegenstelling tot bij een spoel of bij een condensator zijn bij een weerstand de spanning en de stroom in fase met elkaar.

Samengevat geldt:

Voor de impedantie van een weerstand geldt: $Z_R = R$.
 Bij een weerstand lopen de spanning en de stroom in fase met elkaar.

Spoel

In de volgende beschouwing sluiten we een spoel aan op een bron die een harmonisch variërende spanning levert. Zie de onderstaande linker figuur.



-----Begin van een wiskundig stukje dat eventueel overgeslagen kan worden-----
 De stroom door de spoel varieert ook harmonisch met de tijd en wordt beschreven met:

$$I = I_{\max} \cdot \sin(\omega t).$$

Hierin is $I_{\max}$ de topwaarde van de stroom en ω de hoekfrequentie. Met de formule

$$U = L \cdot \frac{dI}{dt}$$

volgt dan voor spanning over de spoel:

$$U = \omega L I_{\max} \cdot \cos(\omega t).$$

Uit de laatste vergelijking volgt dat voor de topwaarde $U_{\max}$ van de spanning geldt:

$$U_{\max} = \omega L I_{\max}.$$

-----Einde van een wiskundig stukje dat eventueel overgeslagen kan worden-----

Hieruit volgt dat de impedantie van een spoel gelijk is aan ωL .

Bij lage frequenties is de impedantie van de spoel heel klein en laat de spoel dus makkelijk stroom door. Bij hoge frequenties is de impedantie heel groot en laat de spoel dus nauwelijks stroom door.

In het bovenstaande diagram zijn de spanning over en de stroom door de spoel als functie van de tijd getekend. Hieruit blijkt duidelijk dat spanning en stroom niet in fase met elkaar zijn maar dat de spanning een kwart periode voorloopt op de stroom.

Samengevat geldt het volgende voor een spoel.

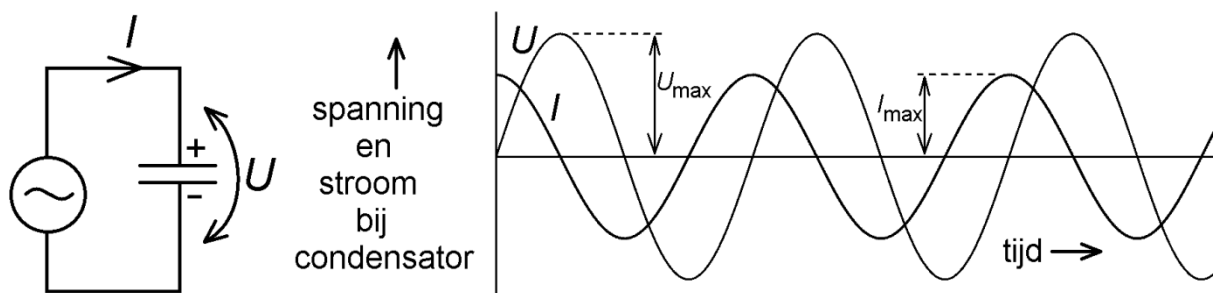
Voor de impedantie van een spoel geldt: $Z_L = \omega L$.

Een spoel is bij lage frequenties bij benadering een kortsluiting en bij hoge frequenties bij benadering een isolator.

Bij een spoel loopt de spanning een kwart periode voor op de stroom.

Condensator

In de volgende beschouwing sluiten we een condensator aan op een bron die een harmonisch variërende spanning levert. Zie de onderstaande linker figuur.



-----Begin van een wiskundig stukje dat eventueel overgeslagen kan worden-----

Voor de spanning over de condensator kunnen we schrijven:

$$U = U_{\max} \cdot \sin(\omega t).$$

Hierin is $U_{\max}$ de topwaarde van de spanning en ω de hoekfrequentie. Met de formule

$$I = C \cdot \frac{dU}{dt}$$

volgt dan voor stroom door de condensator:

$$I = \omega C U_{\max} \cdot \cos(\omega t).$$

Hieruit volgt dat voor de topwaarde $I_{\max}$ van de stroom geldt:

$$I_{\max} = \omega C U_{\max}.$$

-----Einde van een wiskundig stukje dat eventueel overgeslagen kan worden-----

Hieruit volgt dat de impedantie van een condensator gelijk is aan $1/(\omega C)$.

Bij lage frequenties is de impedantie van de condensator heel groot en laat de condensator dus nauwelijks stroom door. Bij hoge frequenties is de impedantie heel klein en laat de condensator dus makkelijk stroom door.

In het bovenstaande diagram zijn de spanning over en de stroom door de condensator als functie van de tijd getekend. Hieruit blijkt duidelijk dat spanning en stroom niet in fase met elkaar zijn maar dat de stroom een kwart periode voorloopt op de spanning.

Samengevat geldt het volgende voor een condensator.

Voor de impedantie van een condensator geldt: $Z_C = \frac{1}{\omega C}$.

Een condensator is bij lage frequenties bij benadering een isolator en bij hoge frequenties bij benadering een kortsluiting.

Bij een condensator loopt de stroom een kwart periode voor op de spanning.

Getallenvoorbeeld

Een spoel met een zelfinductie van 3,0 mH wordt aangesloten op een wisselspanning met een frequentie van 2,0 kHz en met een amplitude van 4,0 V.

Voor de impedantie van de spoel geldt dan:

$$Z_L = \omega L = 2\pi \cdot 2,0 \cdot 10^3 \cdot 3,0 \cdot 10^{-3} = 38 \Omega$$

Voor de amplitude van de stroom geldt dan:

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{Z_L} = \frac{4,0 \text{ V}}{37,7 \Omega} = 0,11 \text{ A}$$

Ezelsbrug

Het feit dat bij een spoel de spanning voorloopt op de stroom en bij een condensator de stroom voorloopt op de spanning kan eenvoudig worden herinnerd met het ezelsbruggetje 'Circus-Luipaard'. In het woord Circus staat de C voor condensator en komt de letter I (= stroom) voor de letter U (= spanning). In het woord Luipaard staat de L voor spoel en komt de letter U voor de letter I.

Opgaven bij § 3

Opgave 1

Een spoel met een zelfinductie van 20 mH wordt aangesloten op een wisselspanning met een frequentie van 100 Hz en met een amplitude van 8,0 V.

a.

Bereken de impedantie van de spoel.

b.

Bereken de amplitude van de wisselstroom die door de spoel loopt.

Opgave 2

Een condensator met een capaciteit van 0,60 μF wordt aangesloten op een wisselspanning met een frequentie van 2,0 kHz en met een amplitude van 12 V.

a.

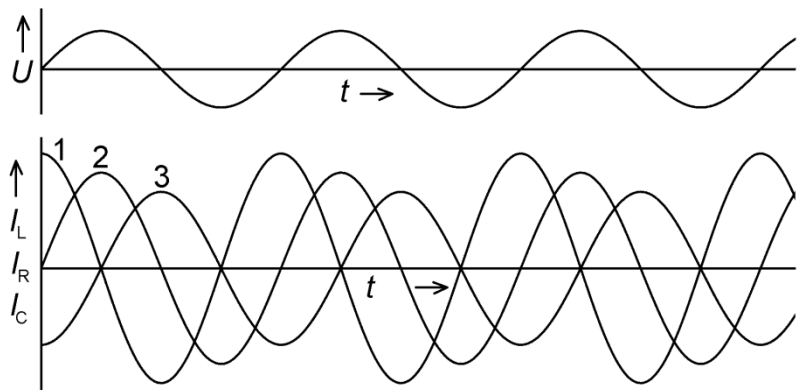
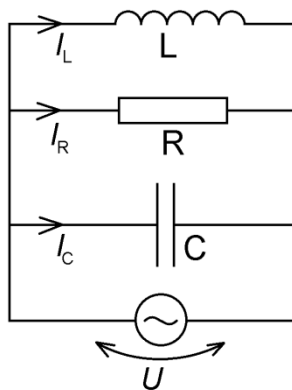
Bereken de impedantie van de condensator.

b.

Bereken de amplitude van de wisselstroom die door de condensator loopt.

Opgave 3

In de onderstaande schakeling zijn een spoel, een weerstand en een condensator op de polen van een wisselspanningsbron aangesloten. In de diagrammen zijn de wisselspanning U en de drie stromen I_L , I_R en I_C als functie van de tijd uitgezet.



Bij de volgende vragen worden de spoel, weerstand en condensator met 'element' aangeduid.

a.

Door welk element loopt stroom 1?

Door welk element loopt stroom 2?

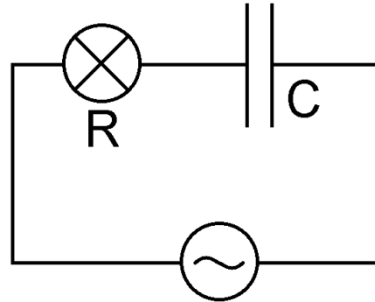
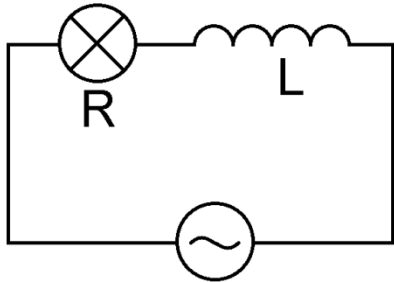
Door welk element loopt stroom 3?

b.

Loopt stroom 1 door het element met de grootste of de kleinste impedantie?

Opgave 4

In de onderstaande figuren is het lampje R een zuivere weerstand van $100\ \Omega$. De spanning over en de stroom door het lampje zijn in fase met elkaar. We spreken dan ook wel van een 'ohmse weerstand'. De spoel L heeft een zelfinductie van $35\ \text{mH}$ en de condensator C heeft een capaciteit van $10\ \mu\text{F}$. De wisselspanningsbron levert een sinusvormige wisselspanning waarvan de frequentie gevarieerd kan worden.



a.

Leg uit dat in de linker figuur het lampje wel brandt bij lage frequenties en niet bij hoge frequenties.

b.

Leg uit dat in de rechter figuur het lampje wel brandt bij hoge frequenties en niet bij lage frequenties.

In de linker figuur vormt de frequentie waarbij de impedantie van het lampje en van de spoel gelijk aan elkaar zijn, een soort grens tussen het wel en niet branden van het lampje. We spreken in dit verband van de 'kantelfrequentie'.

c.

Bereken de kantelfrequentie in de linker figuur.

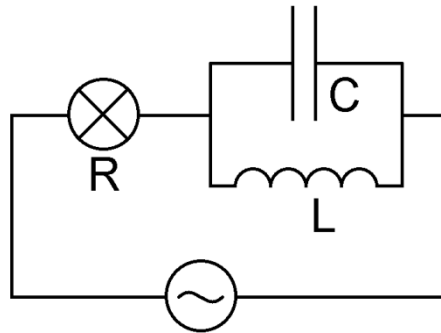
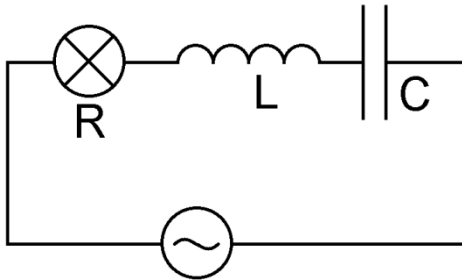
In de rechter figuur vormt de frequentie waarbij de impedantie van het lampje en van de condensator gelijk aan elkaar zijn, een soort grens tussen het wel en niet branden van het lampje. We spreken in dit verband weer van de 'kantelfrequentie'.

d.

Bereken de kantelfrequentie in rechter figuur.

Opgave 5

In de onderstaande figuren is het lampje R een ohmse weerstand van $100\ \Omega$. De spoel L heeft een zelfinductie van $35\ \text{mH}$ en de condensator C heeft een capaciteit van $10\ \mu\text{F}$. De wisselspanningsbron levert een sinusvormige wisselspanning waarvan de frequentie gevarieerd kan worden.



a.

In de linker figuur spreken we van 'serieresonantie' als de frequentie zodanig gekozen is, dat de impedantie van de spoel gelijk is aan de impedantie van de condensator. Leg uit dat het lampje bij serieresonantie HET FELST brandt.

b.

In de rechter figuur spreken we van 'parallelresonantie' als de frequentie zodanig gekozen is, dat de impedantie van de spoel gelijk is aan de impedantie van de condensator. Leg uit dat het lampje bij parallelresonantie NIET brandt.

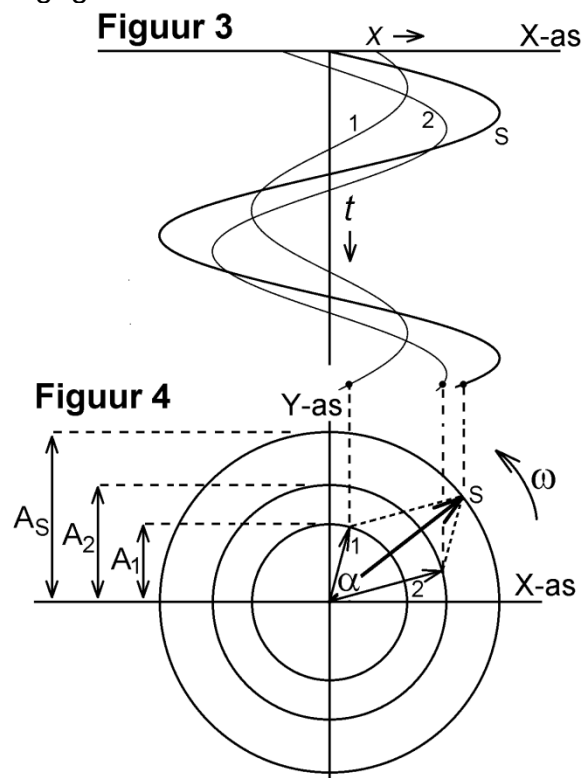
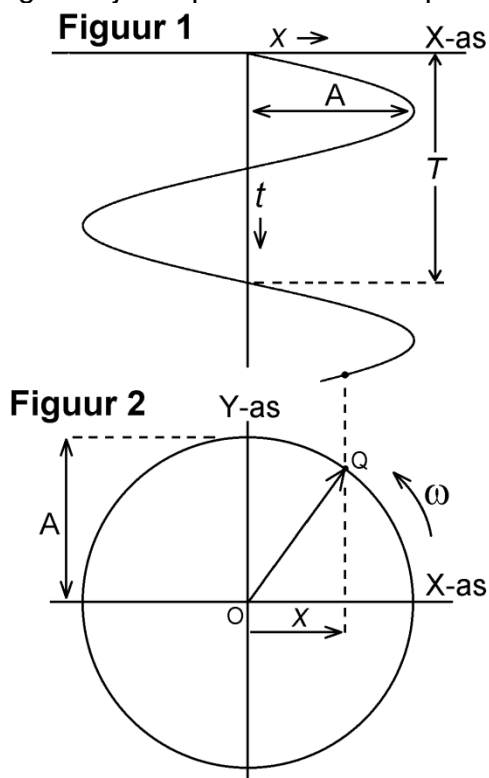
c.

Bereken de resonantiefrequentie in de bovenstaande figuren.

§ 4 Harmonisch variërende signalen optellen

Een harmonische trilling uit een cirkelbeweging afleiden

In de onderstaande figuur 1 varieert grootte x harmonisch met de tijd t . Hierbij wijst de tijdas verticaal naar beneden. Deze x kan bijvoorbeeld spanning of stroom zijn. In de figuur zijn de periode T en amplitude A aangegeven.



In figuur 2 wordt het harmonische signaal uit figuur 1 in verband gebracht met een cirkelbeweging. Punt Q voert een linksom draaiende cirkelbeweging uit. Daarbij is de omlooptijd van Q gelijk aan de periode T en de straal van de cirkelbeweging gelijk aan de amplitude A . De waarde van grootte x kan gevonden worden door punt Q te projecteren op de (horizontale) x -as. De vector (pijl) die vanuit de oorsprong O naar punt Q loopt, wordt in deze en volgende paragrafen de 'signaalvector' genoemd. De signaalvector heeft een lengte ter grootte van A en draait linksom rond met hoekfrequentie $\omega = 2\pi/T$.

Twée sinussignalen met dezelfde frequentie optellen

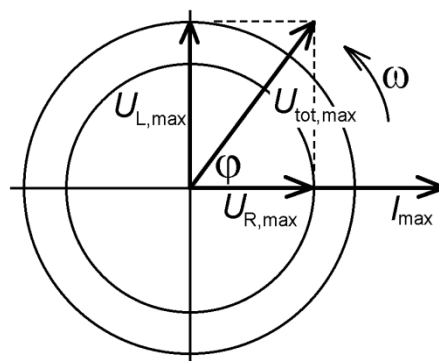
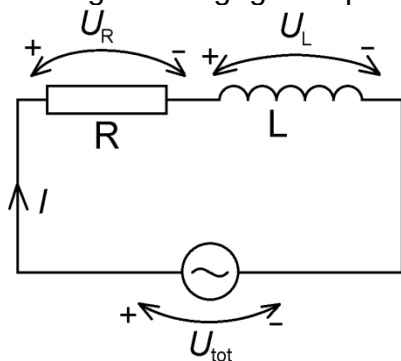
In de bovenstaande figuur 3 zijn er drie harmonisch met de tijd variërende signalen afgebeeld die met 1, 2 en S zijn aangeduid. De tijdas wijst weer verticaal naar beneden. Signaal S is de som van de signalen 1 en 2. Er geldt dus op ieder moment: $x_S = x_1 + x_2$. Omdat 1 en 2 dezelfde frequentie hebben, varieert S ook harmonisch met diezelfde frequentie.

In figuur 4 is getekend hoe elk signaal uit een cirkelbeweging volgt. Er zijn dus drie verschillende cirkelbewegingen met dezelfde hoekfrequentie. In de figuur loopt de signaalvector van 1 voor op die van 2. De hoek tussen beide vectoren is met α aangegeven. De signaalvector van S wordt gevonden door de signaalvector van 1 en van 2 vectorieel op te tellen (zie het geconstrueerde parallellogram). Omdat de signalen 1 en 2 niet in fase zijn (anders zou α nul zijn), is de amplitude A_S van signaal S kleiner dan de som van amplitude A_1 van signaal 1 en amplitude A_2 van signaal 2.

In de figuur draait de vectorconstructie als geheel rond. Bij het construeren van de resulterende signaalvector laat men de cirkels vaak weg en kiest men één van de signaalvectoren langs de horizontale as. Zie de onderstaande voorbeelden. We moeten echter steeds blijven bedenken dat het vectordiagram een 'momentopname' is en dat het gehele stelsel van vectoren in feite voortdurend ronddraait.

Optellen van spanningen in een serieschakeling

In de onderstaande linker figuur is een serieschakeling van weerstand R met spoel L op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Omdat het een serieschakeling betreft, is de stroom I in elk punt van de stroomkring steeds gelijk. De momentane spanningen (niet de effectieve spanningen!) over de bron, de weerstand en de spoel zijn met U_{tot} , U_R en U_L aangeduid. Hierbij is 'tot' een afkorting van 'totaal'. Er geldt op elk tijdstip: $U_{\text{tot}} = U_R + U_L$. Merk op dat tijdens een nuldoorgang van de bronspanning ($U_{\text{tot}} = 0$) de spanning over de weerstand en over de spoel niet nul zijn. De polariteit van één van de twee is dan tegengesteld aan de in de figuur aangegeven polariteit.



In de rechter figuur zijn de signaalvectoren van U_R en U_L in een vectordiagram getekend. Aangezien de stroom I in dit geval de gemeenschappelijke grootheid is, ligt het voor de hand om deze stroom uit te zetten langs de horizontale as. De spanning U_R over de weerstand is in fase met de stroom en de bijbehorende signaalvector valt dus ook samen met de horizontale as. De spanning U_L over de spoel loopt echter een kwart periode voor op de stroom. In het vectordiagram komt dit overeen met 90 graden. Omdat de signaalvectoren linksom draaien, moet de signaalvector van de spoelspanning naar boven wijzen. Door beide signaalvectoren vectorieel op te tellen, vinden we de signaalvector van de totale spanning U_{tot} .

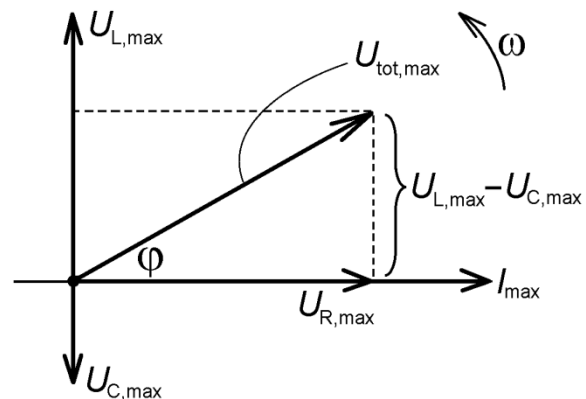
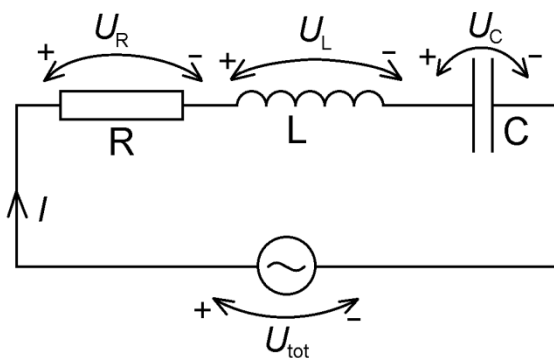
Voor de amplitude van de totale spanning geldt volgens de wet van Pythagoras:

$$U_{\text{tot,max}}^2 = U_{R,\text{max}}^2 + U_{L,\text{max}}^2$$

Verder zien we dat de totale spanning (de bronspanning dus) U_{tot} in fase vóórloopt op de stroom, maar minder dan 90 graden. Uit het vectordiagram kunnen we aflezen hoe groot de faseverschuiving φ van de spanning ten opzichte van de stroom is. We vinden daarvoor de volgende uitdrukking.

$$\tan(\varphi) = \frac{U_{L,\text{MAX}}}{U_{R,\text{MAX}}}$$

We kunnen de bovenstaande serieschakeling uitbreiden met een condensator. Zie de onderstaande linker schakeling. Het bijbehorende vectordiagram staat rechts afgebeeld. Dit keer zijn de cirkels van de signaalvectoren weggelaten. In de figuur is de amplitude van de spanning over de spoel groter getekend dan die over de condensator. In dat geval loopt de totale spanning in fase voor op de stroom. Het omgekeerde geval is natuurlijk ook mogelijk. In dat laatste geval loopt de totale spanning in fase achter op de stroom.



De bovenstaande formules kunnen eenvoudig uitgebreid worden en staan in het onderstaande kader.

Serieschakeling van een weerstand (R), een spoel (L) en een condensator (C)

Momentane spanningen:

$$U_{\text{tot}} = U_R + U_L + U_C$$

Amplitudes van de spanningen:

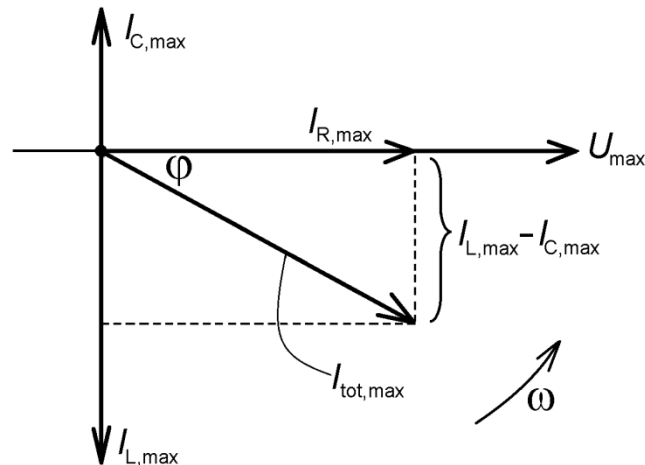
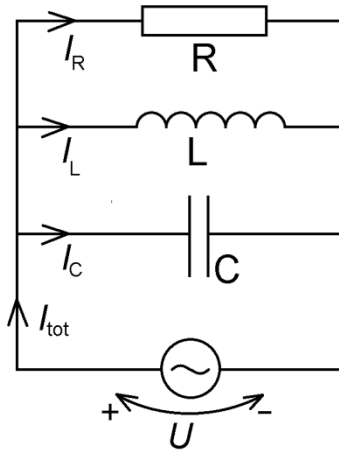
$$U_{\text{tot,max}}^2 = U_{R,\text{max}}^2 + (U_{L,\text{max}} - U_{C,\text{max}})^2$$

Faseverschuiving van de totale spanning ten opzichte van de stroom:

$$\tan(\varphi) = \frac{U_{L,\text{max}} - U_{C,\text{max}}}{U_{R,\text{max}}}$$

Optellen van stromen in een parallelschakeling

In de onderstaande linker figuur is een parallelschakeling van weerstand R met spoel L en condensator C op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Omdat het een parallelschakeling betreft, is de spanning U over elke tak steeds gelijk. De momentane stromen door de bron, de weerstand, de spoel en de condensator zijn met I_{tot} , I_R , I_L en I_C aangeduid.



In de rechter figuur zijn de signaalvectoren van I_R , I_L en I_C in een vectordiagram getekend. Aangezien de spanning U in dit geval de gemeenschappelijke grootte is, ligt het voor de hand om deze langs de horizontale as uit te zetten. De stroom I_R door de weerstand is in fase met de spanning en zijn signaalvector wijst dus ook naar rechts. De stroom I_L door de spoel loopt een kwart periode (of te wel 90 graden) achter op de spanning en daarom wijst zijn signaalvector naar beneden. De stroom I_C door een condensator loopt een kwart periode (of te wel 90 graden) voor op de spanning en daarom wijst zijn signaalvector naar boven. Bedenk daarbij steeds dat alle vectoren voortdurend linksom draaien.

Door de signaalvectoren van de drie stromen vectorieel op te tellen, vinden we de signaalvector van de totale stroom I_{tot} . In het vectordiagram is de amplitude van de stroom door de spoel groter getekend dan die door de condensator. De spanning loopt dan in fase voor op de totale stroom. De omgekeerde situatie is natuurlijk ook mogelijk.

Op dezelfde manier als bij de hiervoor besproken serieschakeling vinden we de relevante betrekkingen in het volgende kader.

Parallelschakeling van een weerstand (R), een spoel (L) en een condensator (C)

Momentane stromen:

$$I_{\text{tot}} = I_R + I_L + I_C$$

Amplitudes van de stromen:

$$I_{\text{tot,max}}^2 = I_{R,\text{max}}^2 + (I_{L,\text{max}} - I_{C,\text{max}})^2$$

Faseverschuiving van de spanning ten opzichte van de totale stroom:

$$\tan(\varphi) = \frac{I_{L,\text{max}} - I_{C,\text{max}}}{I_{R,\text{max}}}$$

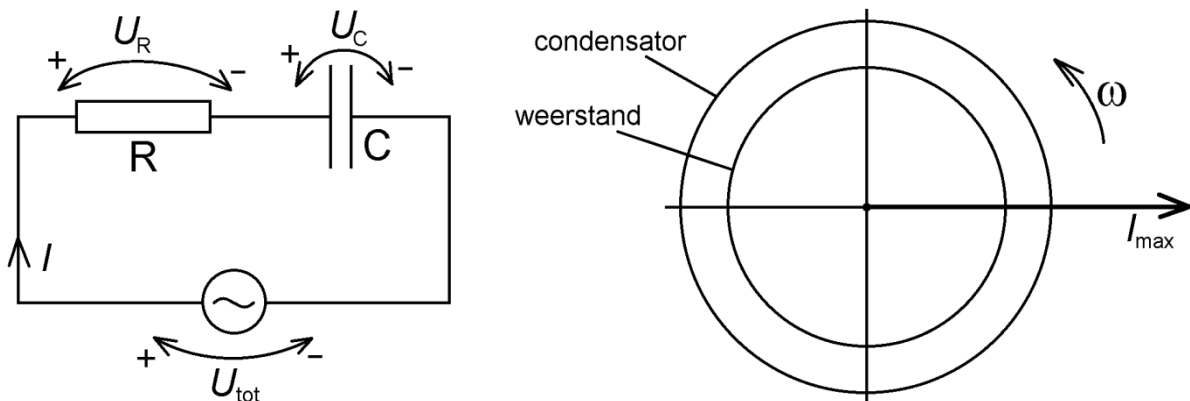
Opgaven bij § 4

Opgave 1

Als twee harmonisch variërende signalen 1 en 2 met dezelfde frequentie bij elkaar worden opgeteld, ontstaat er een nieuw harmonisch variërend signaal S. In een bepaald geval is de amplitude van S gelijk aan de amplitude van 1 plus de amplitude van 2. Aan welke voorwaarde moet dan voldaan zijn?

Opgave 2

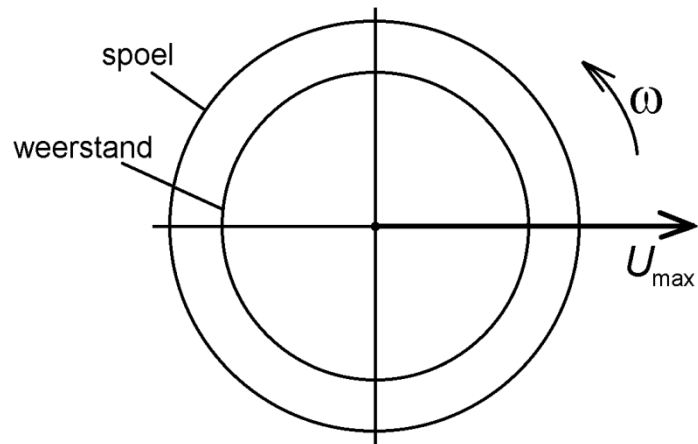
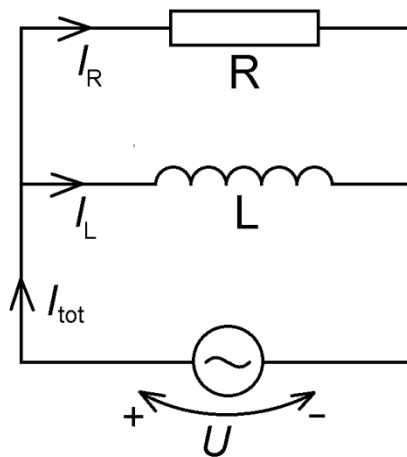
In de onderstaande linker figuur is een serieschakeling van weerstand R met condensator C op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Op elk tijdstip geldt: $U_{\text{tot}} = U_R + U_C$.



- Teken in de rechter figuur de signaalvectoren die horen bij de spanning over de weerstand en de spanning over de condensator. Zet er $U_{R,\text{max}}$ en $U_{C,\text{max}}$ bij. Bedenk daarbij dat de spanning over de condensator een kwart periode achterloopt op de stroom door de condensator.
- Construeer de signaalvector die hoort bij de totale spanning (= bronspanning) U_{tot} . Zet er $U_{\text{tot,max}}$ bij.
- Schrijf het verband op tussen $U_{\text{tot,max}}$, $U_{R,\text{max}}$ en $U_{C,\text{max}}$.
- Schrijf de uitdrukking op voor de faseverschuiving φ van de totale spanning ten opzichte van de stroom.

Opgave 3

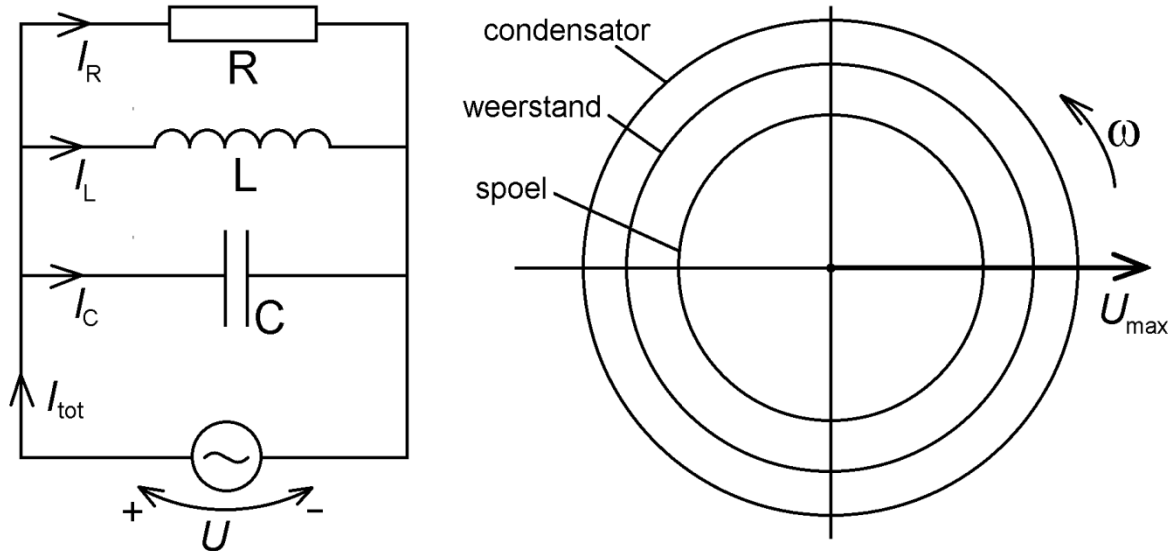
In de onderstaande linker figuur is een parallelschakeling van weerstand R met spoel L op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Op elk tijdstip geldt: $I_{\text{tot}} = I_R + I_L$.



- Teken in de rechter figuur de signaalvectoren die horen bij de stroom door de weerstand en de stroom door de spoel. Zet er $I_{R,\text{max}}$ en $I_{L,\text{max}}$ bij.
- Construeer de signaalvector die hoort bij de totale stroom I_{tot} . Zet er $I_{\text{tot,max}}$ bij.
- Schrijf het verband op tussen $I_{\text{tot,max}}$, $I_{R,\text{max}}$ en $I_{L,\text{max}}$.
- Schrijf de uitdrukking op voor de faseverschuiving φ van de spanning ten opzichte van de totale stroom.

Opgave 4

In de onderstaande linker figuur is een parallelschakeling van weerstand R met spoel L en condensator C op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Op elk tijdstip geldt: $I_{\text{tot}} = I_R + I_L + I_C$.



a. Teken in de rechter figuur de signaalvectoren die horen bij de stromen door de weerstand, spoel en condensator. Zet er $I_{R,\text{max}}$ en $I_{L,\text{max}}$ en $I_{C,\text{max}}$ bij.

b. Construeer de signaalvector die hoort bij de totale stroom I_{tot} . Zet er $I_{\text{tot,max}}$ bij.

In de rest van deze opgave gaan we er vanuit dat de maximale stroomsterktes door de weerstand, de spoel en de condensator achtereenvolgens 3,0 A en 2,5 A en 4,0 A bedragen

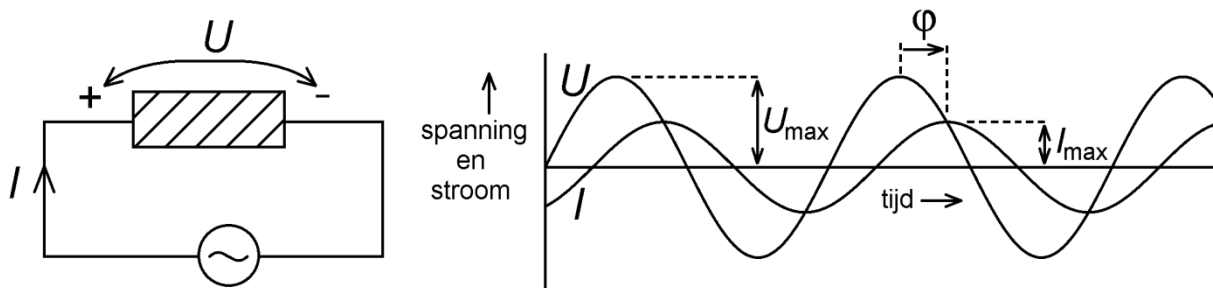
c. Bereken dan de maximale stroomsterkte door de bron.

d. Bereken de faseverschuiving van de spanning ten opzichte van de totale stroom.

§ 5 Impedantie van serie- en parallelschakelingen

Impedantie en faseverschuiving

In de onderstaande linker figuur is een willekeurige schakeling op een spanningsbron aangesloten. Deze schakeling is als een gearceerd blokje getekend. De bron levert een sinusvormige wisselspanning U . Als de schakeling alleen bestaat uit weerstanden, spoelen en condensatoren, dan is de stroom I door de stroomkring ook sinusvormig. In de rechter figuur is het verloop van de spanning over en de stroom door de schakeling weergegeven.



Er zijn twee grootheden die het verband tussen de spanning en de stroom weergeven namelijk de impedantie Z en de faseverschuiving ϕ van de spanning ten opzichte van de stroom.

Onder de impedantie verstaan we het quotiënt van de topwaarden (amplitudes) van de wisselspanning en de wisselstroom. Hiervoor geldt dus:

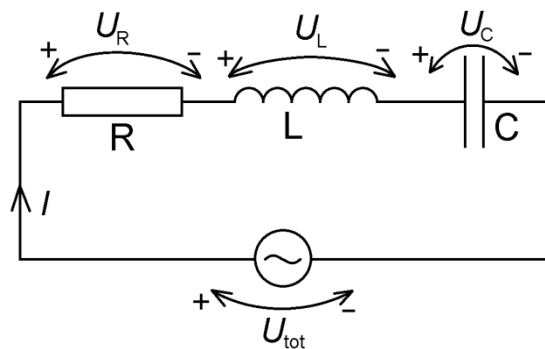
$$Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$$

De faseverschuiving ϕ wordt uitgedrukt als hoek waarbij 90 graden overeenkomt met een kwart periode. Als de spanning in fase voorloopt op de stroom is ϕ per definitie positief en anders is hij negatief. We hebben in de vorige paragraaf al gebruik gemaakt van deze tekenafspraken.

In deze paragraaf beperken we ons tot serie- en parallelschakelingen.

Serieschakeling van weerstand, spoel en condensator

In de onderstaande linker figuur is een serieschakeling van weerstand R , spoel L en condensator C op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Rechts van de schakeling is het verband gegeven tussen de amplitudes van de verschillende spanningen in de schakeling. Ook een uitdrukking voor de faseverschuiving tussen de totale spanning en de stroom gegeven. Deze twee formules zijn in de vorige paragraaf afgeleid.



$$U_{\text{tot,max}}^2 = U_{R,\text{max}}^2 + (U_{L,\text{max}} - U_{C,\text{max}})^2$$

$$\tan(\varphi) = \frac{U_{L,\text{max}} - U_{C,\text{max}}}{U_{R,\text{max}}}$$

Als we in de bovenste vergelijking alle termen delen door het kwadraat van de amplitude van de stroom (dus delen door I_{max}^2) krijgen we de eerste formule in het onderstaande kader. Deze geeft aan hoe de (totale) impedantie van de serieschakeling (Z_{ser}) afhangt van de impedanties van de afzonderlijke componenten (weerstand, spoel en condensator).

Als we in de onderste vergelijking de teller en noemer van het rechter lid delen door de amplitude van de stroom, krijgen we de tweede formule in het onderstaande kader. Deze vertelt ons hoe de faseverschuiving φ tussen spanning en stroom afhangt van de impedanties van de losse componenten.

Serieschakeling van weerstand R met spoel L en condensator C:

(voor een spoel geldt: $Z_L = \omega L$)

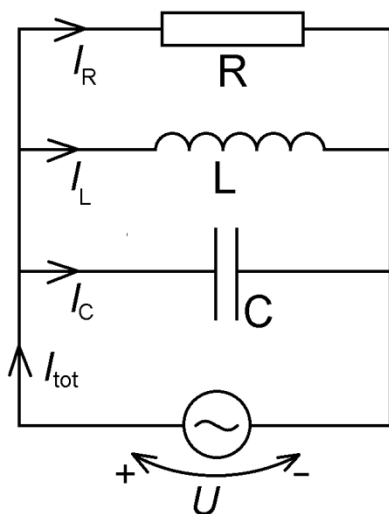
(voor een condensator geldt: $Z_C = \frac{1}{\omega C}$)

$$Z_{\text{ser}}^2 = R^2 + (Z_L - Z_C)^2$$

$$\tan(\varphi) = \frac{Z_L - Z_C}{R}$$

Parallelschakeling van weerstand, spoel en condensator

In de onderstaande linker figuur is een parallelschakeling van weerstand R, spoel L en condensator C op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt. Rechts van de schakeling is het verband gegeven tussen de amplitudes van de verschillende stromen in de schakeling. Ook een uitdrukking voor de faseverschuiving tussen de totale spanning en de stroom gegeven. Deze twee formules zijn in de vorige paragraaf afgeleid.



$$I_{\text{tot,max}}^2 = I_{R,\text{max}}^2 + (I_{L,\text{max}} - I_{C,\text{max}})^2$$

$$\tan(\varphi) = \frac{I_{L,\text{max}} - I_{C,\text{max}}}{I_{R,\text{max}}}$$

Als we in de bovenste vergelijking alle termen delen door het kwadraat van de amplitude van de spanning (dus delen door $U_{\max}^2$) krijgen we de eerste formule in het onderstaande kader. Deze geeft aan hoe de (totale) impedantie van de parallelschakeling (Z_{par}) afhangt van de impedanties van de afzonderlijke componenten (weerstand, spoel en condensator).

Als we in de onderste vergelijking de teller en noemer van het rechter lid delen door de amplitude van de spanning, krijgen we de tweede formule in het onderstaande kader. Deze vertelt ons hoe de faseverschuiving φ tussen spanning en stroom afhangt van de impedanties van de losse componenten.

Parallelschakeling van weerstand R met spoel L en condensator C:

(voor een spoel geldt: $Z_L = \omega L$)

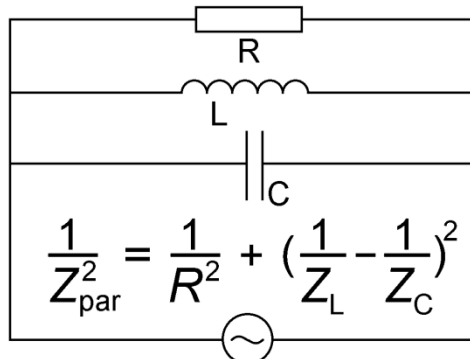
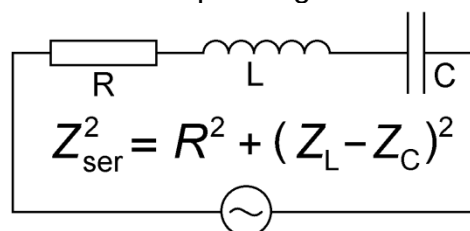
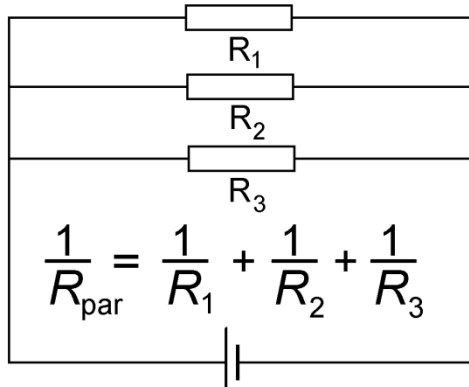
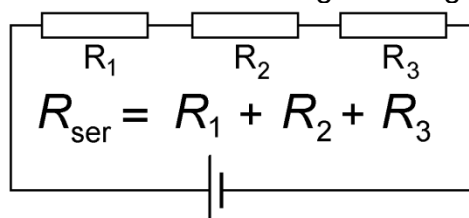
(voor een condensator geldt: $Z_C = \frac{1}{\omega C}$)

$$\frac{1}{Z_{\text{par}}^2} = \frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_C} \right)^2$$

$$\tan(\varphi) = \frac{\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_C}}{\frac{1}{R}}$$

Vergelijking met gewone serie- en parallelschakelingen

In de onderstaande twee linker schakelingen staan drie (gewone) weerstanden in serie (boven) en parallel (onder). In de twee rechter schakelingen staan een weerstand, een spoel en een condensator in serie (boven) en parallel (onder). Links levert de bron in beide gevallen gelijkspanning en rechts wisselspanning.



Bij elke schakeling is de formule vermeld waarmee de resulterende weerstand of impedantie berekend kan worden. Allereerst valt het op dat de formules in de twee rechter schakelingen kwadraten bevatten. Dit houdt verband met de wet van Pythagoras in het vectordiagram zoals dat in de vorige paragraaf besproken is. Ook is het opmerkelijk dat de rechter formules een minteken bevatten. Dat volgt uit het feit dat de spanningen of stromen van de spoel en de condensator in tegenfase zijn.

Serie- en parallelresonantie

Bij de hiervoor besproken serieschakeling kan 'serieresonantie' optreden. Hierbij is de frequentie zodanig gekozen, dat de impedantie van de spoel gelijk is aan de impedantie van de condensator. De bijbehorende spanningen heffen elkaar dan op. De totale impedantie (Z_{ser}) is dan minimaal, namelijk weerstand R . Bovendien is de faseverschuiving φ dan nul. Als de impedantie van de spoel groter is dan die van de condensator, is de faseverschuiving φ positief, anders is hij negatief.

Bij de eerder besproken parallelschakeling kan 'parallelresonantie' optreden. Hierbij is de frequentie zodanig gekozen, dat de impedantie van de spoel gelijk is aan de impedantie van de condensator. De bijbehorende stromen heffen elkaar dan op. De totale impedantie (Z_{par}) is dan maximaal, namelijk weerstand R . Bovendien is de faseverschuiving φ dan nul. Als de impedantie van de spoel kleiner is dan die van de condensator, is de faseverschuiving φ positief, anders is hij negatief.

Getallenvoorbeeld

Stel dat een weerstand van 50Ω en een spoel van $0,030 \text{ H}$ en een condensator van $1,0 \mu\text{F}$ in serie op een spanningsbron worden aangesloten. Bij een frequentie van 1050 Hz geldt dan:

$$Z_L = \omega L = 2\pi \cdot 1050 \cdot 0,030 = 198 \Omega.$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \cdot 1050 \cdot 10^{-6}} = 152 \Omega.$$

Voor de impedantie van de serieschakeling geldt dan:

$$Z_{\text{ser}} = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{50^2 + (198 - 152)^2} = 68 \Omega.$$

Als de bronspanning (= totale spanning) een amplitude heeft van $8,0 \text{ V}$, geldt voor de amplitude van de stroom:

$$I_{\text{max}} = \frac{U_{\text{tot,max}}}{Z_{\text{ser}}} = \frac{8,0 \text{ V}}{68 \Omega} = 0,12 \text{ A}.$$

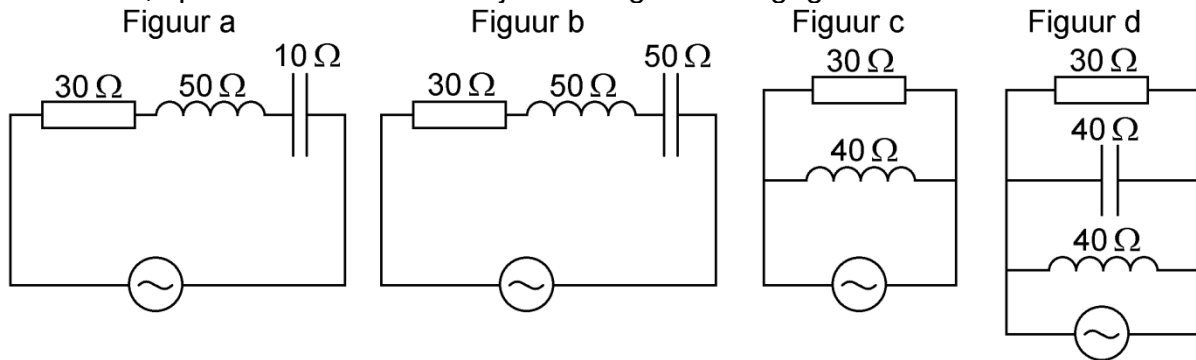
Voor de faseverschuiving van de totale spanning ten opzichte van de stroom geldt:

$$\tan(\varphi) = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{198 - 152}{50}. \text{ Hieruit volgt: } \varphi = +43^\circ.$$

Opgaven bij § 5

Opgave 1

In de onderstaande figuren staan vier schakelingen getekend. De spanningsbron levert een sinusvormig signaal van één bepaalde frequentie. De impedantie van de weerstand, spoel en condensator zijn in de figuur weergegeven.



a.
Bereken de impedantie van serieschakeling in figuur a.

Bereken de faseverschuiving van de bronspanning ten opzichte van de stroom in figuur a.

b.
Hoe groot is de impedantie van de serieschakeling in figuur b?

Hoe groot is in figuur b de faseverschuiving?

Hoe heet het verschijnsel dat de werking van de spoel en die van de condensator elkaar opheffen in figuur b?

c.
Bereken de impedantie van de parallelschakeling in figuur c.

Bereken de faseverschuiving van de bronspanning ten opzichte van de totale stroom in figuur c.

d.
Hoe groot is de impedantie van de parallelschakeling in figuur d?

Hoe groot is in figuur d de faseverschuiving?

Hoe heet het verschijnsel dat de werking van de spoel en die van de condensator elkaar opheffen in figuur d?

Opgave 2

Een serieschakeling van een weerstand van $350\ \Omega$ en een spoel van $0,15\ \text{H}$ en een condensator van $1,0\ \mu\text{F}$ is op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning levert van $800\ \text{Hz}$. De amplitude van de spanning bedraagt $7,5\ \text{V}$.

a.

Bereken de impedantie van de spoel.

b.

Bereken de impedantie van de condensator.

c.

Bereken de impedantie van de serieschakeling van de weerstand, spoel en condensator.

d.

Bereken de amplitude van de stroom.

e.

Bereken de faseverschuiving van de bronspanning ten opzichte van de stroom.

Opgave 3

Een weerstand van $47\ \Omega$ is parallel met een condensator van $350\ \text{nF}$ op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt van $6,0\ \text{kHz}$. De amplitude van de spanning bedraagt $12\ \text{V}$.

a.

Bereken de impedantie van de parallelschakeling van de weerstand en de condensator.

b.

Bereken de amplitude van de stroom.

c.

Bereken de faseverschuiving van de bronspanning ten opzichte van de totale stroom.

Opgave 4

Een weerstand R is in serie met spoel L op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt.

a.

Bewijs dat voor de impedantie van de serieschakeling geldt:

$$Z_{ser} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

b.

Bewijs dat voor de faseverschuiving φ van de bronspanning ten opzichte van de stroom geldt:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}.$$

Opgave 5

Een weerstand R is parallel met condensator C op een bron aangesloten die een sinusvormige wisselspanning voortbrengt.

a.

Bewijs dat voor de impedantie van de parallelschakeling geldt:

$$Z_{par} = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

b.

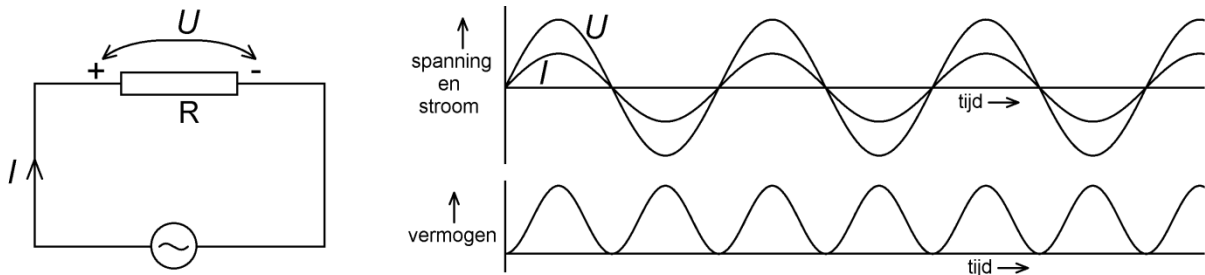
Bewijs dat voor de faseverschuiving φ van de bronspanning ten opzichte van de totale stroom geldt:

$$\tan(\varphi) = -\omega RC.$$

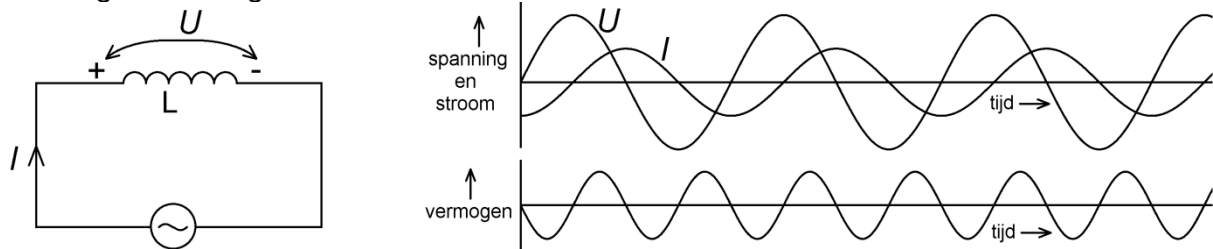
§ 6 Vermogen bij harmonische signalen

Vermogen bij een weerstand, een spoel en een condensator

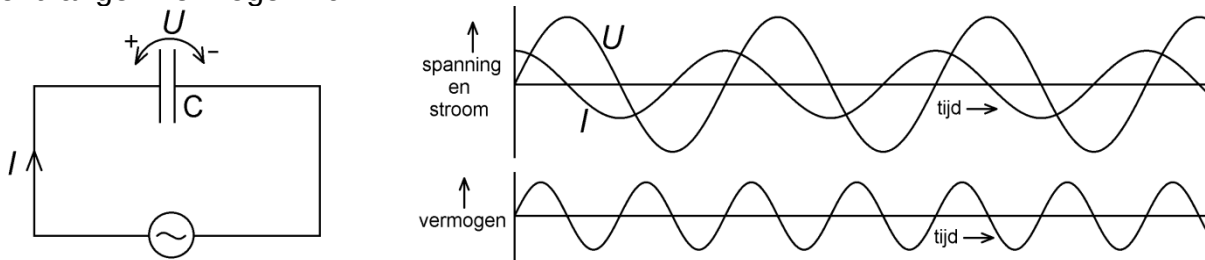
In de onderstaande figuren is een ohmse weerstand R op een bron aangesloten die een sinusspanning levert. Zie de schakeling links. Rechts zijn twee diagrammen afgebeeld. In het bovenste diagram zijn de spanning en de stroom tegen de tijd uitgezet. Deze twee grootheden zijn in fase met elkaar. In het onderste diagram is het door de weerstand opgenomen vermogen tegen de tijd uitgezet. Het vermogen varieert met de dubbele frequentie tussen nul en een maximum waarde. Het vermogen is nooit negatief. Als U_{eff} de effectieve spanning is en I_{eff} de effectieve stroom, dan geldt voor het gemiddeld opgenomen vermogen: $P_{\text{gem}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$.



In de onderstaande figuren is een spoel L op de bron aangesloten. De figuren zijn analoog aan het bovenstaande geval van een weerstand. Het bovenste diagram laat zien dat de spanning een kwart periode (90 graden) voorloopt op de stroom (zoals verwacht!). Uit het onderste diagram blijkt dat het vermogen soms positief is en soms negatief. Bij een positief vermogen ontvangt de spoel energie van de bron en slaat deze op als magnetische veldenergie in en rond de spoel. Bij een negatief vermogen geeft de spoel deze energie weer terug aan de bron. Gemiddeld in de tijd is het ontvangen vermogen nul.

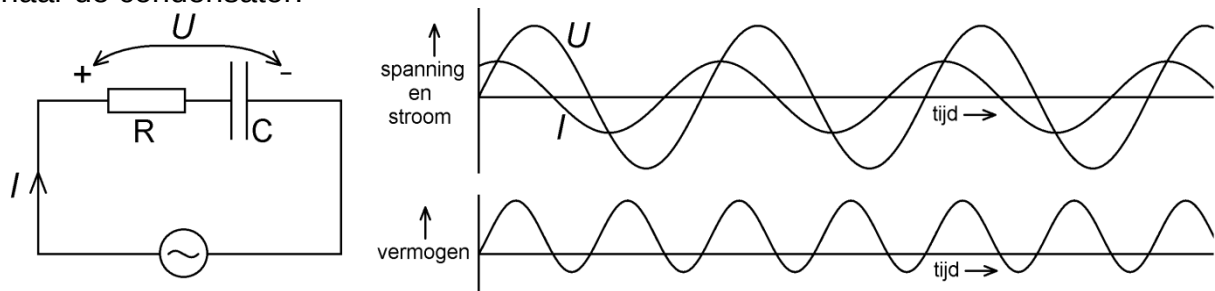


In de onderstaande figuren is een condensator C op de bron aangesloten. Nu loopt de spanning een kwart periode (90 graden) achter op de stroom. Uit het onderste diagram blijkt dat het vermogen zowel positief als negatief kan zijn; net als bij de spoel. Bij een positief vermogen ontvangt de condensator energie van de bron en slaat deze op als elektrische energie. Bij een negatief vermogen geeft de condensator deze energie weer terug aan de bron. Gemiddeld in de tijd is het ontvangen vermogen nul.

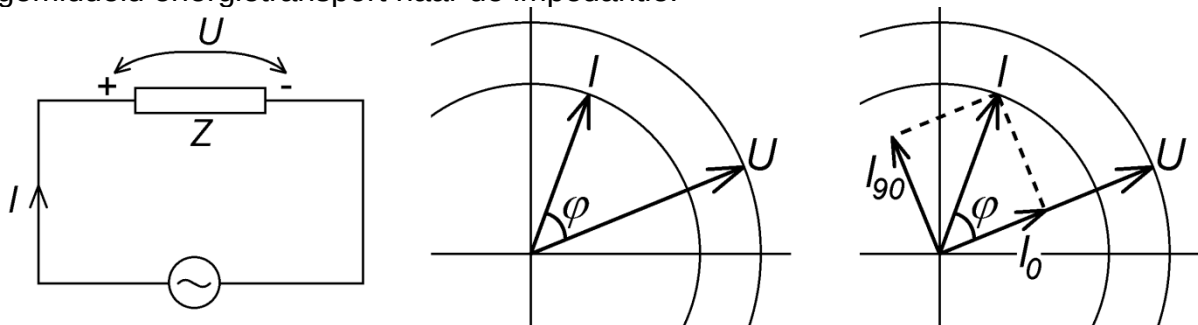


Willekeurig faseverschil tussen de spanning en de stroom

In de onderstaande figuren is een serieschakeling van een weerstand R en een condensator C op een bron aangesloten die een sinusspanning met een bepaalde frequentie levert. Bij een bepaalde keuze van R en C loopt de stroom een zesde periode voor op de spanning (zie het bovenste diagram). Dit komt neer op $360^\circ / 6 = 60^\circ$. Uit het onderste diagram blijkt dat het door de bron geleverde vermogen gemiddeld positief is, maar dat er ook momenten zijn waarop het vermogen negatief is. Alle energie die naar de weerstand gaat, wordt in warmte omgezet. De weerstand kan geen energie opslaan en zal ook nooit energie teruggeven aan de schakeling. De energie die naar de condensator gaat, wordt in de condensator opgeslagen. Deze energie zal even later weer worden afgestaan. Gemiddeld gaat er géén vermogen naar de condensator.



De onderstaande figuren hebben betrekking op het algemene geval waarin een willekeurige combinatie van weerstanden, spoelen en condensatoren op een bron is aangesloten. Zie de linker figuur waarin de impedantie van de schakeling met Z is aangeduid. In de middelste figuur zijn de signaalvectoren van de spanning U en de stroom I getekend. Het faseverschil tussen beide grootheden is met hoek φ aangegeven. Voor de theorie die hierna volgt maakt het niet uit of de stroom voor loopt op de spanning of omgekeerd. Zoals in de rechter figuur is getekend, kunnen we de signaalvector van de stroom ontbinden in een component I_0 die in fase is met de spanning en een component I_{90} die een faseverschil van 90 graden heeft met de spanning. De laatste stroomcomponent levert geen netto bijdrage aan het aan de impedantie geleverde vermogen. Dit zagen we hierboven bij de spoel en de condensator. Alleen de eerste stroomcomponent, I_0 dus, is verantwoordelijk voor een gemiddeld energietransport naar de impedantie.



Het verband tussen I en I_0 is:

$$I_0 = I \cdot \cos(\varphi).$$

De factor $\cos(\varphi)$ wordt de arbeidsfactor genoemd. We kunnen het aan de impedantie afgegeven gemiddelde vermogen dan als volgt berekenen.

$$P_{gem} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi)$$

Hierin is U_{eff} de effectieve spanning en I_{eff} de effectieve stroom.
Omdat $\cos(\varphi) = \cos(-\varphi)$, zien we dat het niet uitmaakt of φ positief of negatief is.
Alleen de grootte van de hoek φ is van belang.

Bij een ohmse weerstand is $\varphi = 0$ en krijgen we $P_{\text{gem}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$ terug.

Bij een spoel en condensator is $\cos(\varphi) = 0$ zodat geldt $P_{\text{gem}} = 0$ (zoals verwacht).

Getallenvoorbeeld 1

Een serieschakeling van een spoel en een (ohmse) weerstand is aangesloten op een wisselspanningsbron. Deze levert een effectieve spanning van 230 V. De door de bron geleverde effectieve stroom bedraagt 12 A en loopt een twaalfde periode achter op de bronspanning. Het aan de schakeling geleverde netto vermogen kan dan als volgt berekend worden.

$$\varphi = 360^\circ / 12 = 30^\circ$$

$$P_{\text{gem}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi) = 230 \cdot 12 \cdot \cos(30^\circ) = 2,4 \text{ kW}$$

Getallenvoorbeeld 2

Een serieschakeling van een weerstand van 400 ohm en een spoel met een zelfinductie van 0,200 henry wordt op een bron aangesloten die een effectieve (sinusvormige) wisselspanning van 12 volt levert bij een frequentie van 500 hertz. Het gemiddelde vermogen dat de bron aan de schakeling levert kan als volgt berekend worden.

Stap 1

Voor de impedantie van de serieschakeling geldt:

$$Z = \sqrt{R^2 + Z_L^2} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} = \sqrt{400^2 + (2\pi \cdot 500)^2 0,20^2} = 745 \Omega$$

Stap 2

Voor de effectieve stroom geldt:

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z} = \frac{12}{745} = 0,016 \text{ A}$$

Stap 3

Voor het faseverschil tussen spanning en stroom geldt:

$$\tan(\varphi) = \frac{Z_L}{R} = \frac{\omega L}{R} = \frac{2\pi \cdot 500 \cdot 0,200}{400} \rightarrow \varphi = 57,5^\circ.$$

Stap 4

Voor het gemiddelde vermogen geldt:

$$P_{\text{gem}} = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos(\varphi) = 12 \cdot 0,0161 \cdot \cos(57,5^\circ) = 0,10 \text{ W}$$

Merk op dat de volgende berekening een alternatief voor de laatste twee stappen is.

$$P_{\text{gem}} = I_{\text{eff}}^2 \cdot R = 0,0161^2 \cdot 400 = 0,10 \text{ W}$$

Opgaven bij § 6

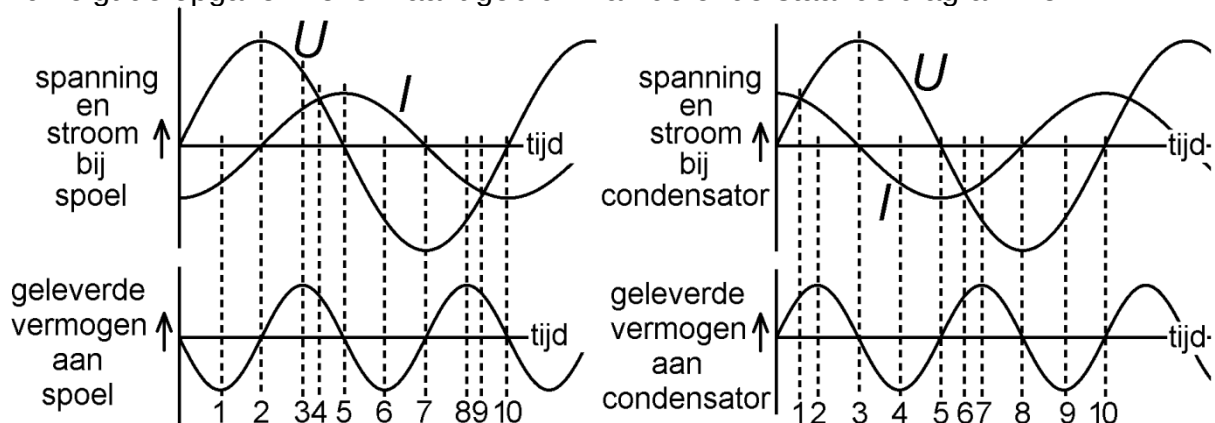
Opgave 1

Ten behoeve van deze opgave wordt eerst de volgende informatie gegeven.

Als er door een spoel een stroom I loopt, bevat deze spoel een hoeveelheid (magnetische) energie ter waarde van $E = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2$.

Als er over een condensator een spanning U staat, bevat deze condensator een hoeveelheid (elektrische) energie ter waarde van $E = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2$.

Nu volgt de opgave. Deze maakt gebruik van de onderstaande diagrammen.



a.

De twee linker diagrammen hebben betrekking op een spoel die op een wisselspanning is aangesloten.

Op welke tijdstippen (genummerd van 1 tot en met 10) bevat de spoel een maximum aan energie? _____

Hoe blijkt dat uit het bovenste diagram?

Hoe blijkt dat uit het onderste diagram?

b.

De twee rechter diagrammen hebben betrekking op een condensator die op een wisselspanning is aangesloten.

Op welke tijdstippen (genummerd van 1 tot en met 10) bevat de condensator een maximum aan energie? _____

Hoe blijkt dat uit het bovenste diagram?

Hoe blijkt dat uit het onderste diagram?

Opgave 2

Een serieschakeling van een condensator en een (ohmse) weerstand is aangesloten op een wisselspanningsbron. Deze levert een effectieve spanning van 30 V. De door de bron geleverde effectieve stroom bedraagt 0,15 A en loopt een zesde periode voor op de bronspanning.

a.

Toon aan dat het faseverschil φ tussen de spanning en de stroom -60° is.

b.

Bereken het gemiddelde vermogen P_{gem} aan de serieschakeling.

Opgave 3

Stel dat een parallelschakeling van een weerstand en een spoel en een condensator op een wisselspanningsbron wordt aangesloten waarbij de effectieve spanning gegeven is. Leg dan uit dat de spoel en de condensator buiten beschouwing gelaten kunnen worden bij het berekenen van het gemiddelde afgegeven (netto) vermogen van de bron.

Opgave 4

Een serieschakeling van een (ohmse) weerstand van 500 ohm en een spoel met een zelfinductie van 0,30 henry wordt op een bron aangesloten die een effectieve wisselspanning van 18 volt levert bij een frequentie van 400 hertz. Bereken het gemiddelde vermogen dat de bron aan de schakeling levert. Doe dit in vier stappen.

Stap 1: bereken de impedantie van de serieschakeling.

Stap 2: bereken de effectieve stroom.

Stap 3: bereken het faseverschil tussen spanning en stroom.

Stap 4: bereken het gemiddelde vermogen met de gegevens uit de drie voorgaande stappen.

Voer tenslotte een controleberekening uit met $P_{gem} = I_{eff}^2 \cdot R$.

Opgave 5

Een serieschakeling van een (ohmse) weerstand van $15\ \Omega$ en een condensator van $4,0\ \mu\text{F}$ wordt op een bron aangesloten die een effectieve wisselspanning van $20\ \text{V}$ levert bij een frequentie van $1,0\ \text{kHz}$. Bereken het gemiddelde vermogen dat de bron aan de serieschakeling levert. Doe dat weer in vier stappen. Voer tenslotte een controleberekening uit met $P_{\text{gem}} = I_{\text{eff}}^2 \cdot R$.

§ 7 Complexe getallen

Complexe getallen

In de wiskunde zijn complexe getallen een uitbreiding op de reële getallen. Een complex getal z kan men schrijven als:

$$z = a + b \cdot i.$$

Hierin zijn a en b reële getallen en i de zogenoemde 'imaginaire eenheid', met als eigenschap $i^2 = -1$.

De schrijfwijze $z = a + b \cdot i$ laat zien dat een complex getal in feite een lineaire combinatie is van een reëel getal en een imaginair getal. Het getal a noemt men het reële deel en het getal b het imaginaire deel van het complexe getal. Van bijvoorbeeld $z = 3 + 8 \cdot i$ is 3 het reële deel en 8 het imaginaire deel.

Met complexe getallen in de vorm $a + ib$ kan gewoon gerekend worden, met de extra rekenregel dat overal i^2 vervangen wordt door -1 .

Getallenvoorbeeld

Als we de complexe getallen $3 + 2 \cdot i$ en $1 + 5 \cdot i$ bij elkaar optellen, krijgen we:

$$(3 + 2 \cdot i) + (1 + 5 \cdot i) = 4 + 7 \cdot i.$$

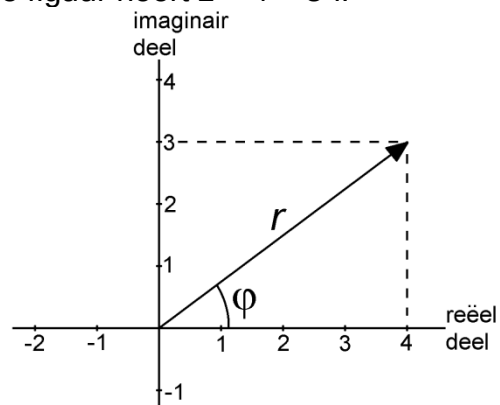
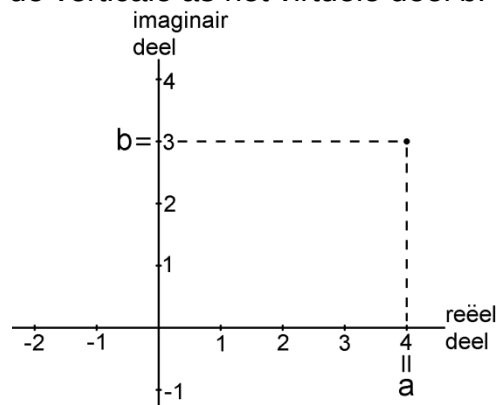
Getallenvoorbeeld

Als we de complexe getallen $3 + 2 \cdot i$ en $1 + 5 \cdot i$ met elkaar vermenigvuldigen, krijgen we:

$$(3 + 2 \cdot i) \cdot (1 + 5 \cdot i) = 3 + 15 \cdot i + 2 \cdot i + 10 \cdot i^2 = 3 + 17 \cdot i - 10 = -7 + 17 \cdot i.$$

Carthesische coördinaten en poolcoördinaten

In de onderstaande linker figuur wordt een complex getal als een punt in het complexe vlak weergegeven. Dit vlak wordt opgespannen door een horizontale en een verticale as. Langs de horizontale as wordt het reële deel a afgelezen en langs de verticale as het virtuele deel b . Bij het punt in de figuur hoort $z = 4 + 3 \cdot i$.



In de rechter figuur wordt een complex getal als een pijl in het complexe vlak weergegeven. De lengte r van de pijl noemt men de modulus (of absolute waarde) van z . De hoek φ tussen de pijl en de reële as noemt men het argument (of poolhoek) van z . Vaak wordt de modulus van z met $|z|$ aangeduid en het argument van z met $\arg(z)$ (in plaats van r en φ).

We noemen a en b carthesische coördinaten of rechthoekige coördinaten en r en φ poolcoördinaten. Het omrekenen van carthesische coördinaten naar poolcoördinaten gaat als volgt.

Voor de modulus geldt: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Voor het argument geldt: $\tan(\varphi) = \frac{b}{a}$.

Het omrekenen van poolcoördinaten naar carthesische coördinaten gaat als volgt.

Voor het reële deel geldt: $a = r \cdot \cos(\varphi)$.

Voor het imaginaire deel geldt: $b = r \cdot \sin(\varphi)$

Getallenvoorbeeld

We kunnen in de bovenstaande figuur r en φ als volgt berekenen.

$$r = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \quad \text{en} \quad \tan(\varphi) = \frac{3}{4} \rightarrow \varphi = 37^\circ.$$

We kunnen de berekening van het argument als volgt sneller opschrijven:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 37^\circ.$$

De functie 'arctan' is de inverse van 'tan' en wordt ook vaak als $\tan^{-1}$ geschreven.

Vermenigvuldigen van complexe getallen

Het vermenigvuldigen van twee complexe getallen z_1 en z_2 gaat het gemakkelijkst met poolcoördinaten. Er gelden namelijk de volgende regels.

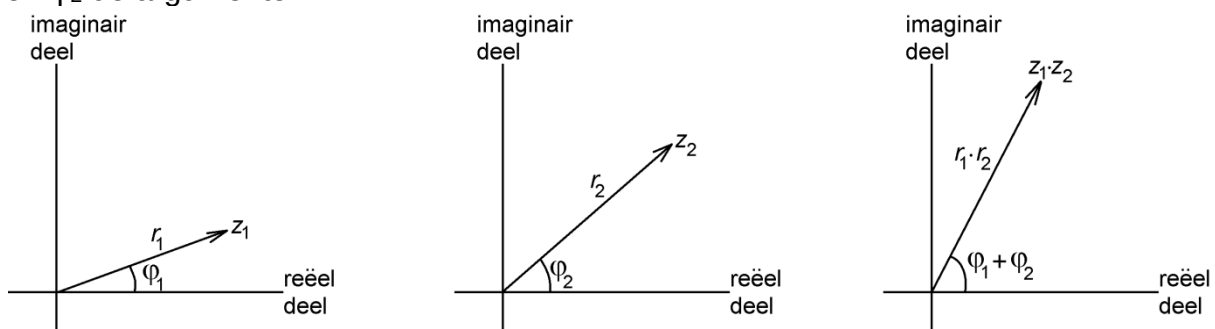
De modulus van het product is gelijk aan het product van de moduli.

In symbolen wordt dit: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Het argument van het product is gelijk aan de som van de argumenten.

In symbolen: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.

De bovenstaande regels over het vermenigvuldigen zijn symbolisch in de onderstaande figuren weergegeven waarin r_1 en r_2 de moduli van z_1 en z_2 zijn en φ_1 en φ_2 de argumenten.



Het bewijs wordt in de volgende regels geleverd (dit bewijs valt buiten de lesstof).

Stel $z_1 = r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1))$ en $z_2 = r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2))$.

Dan geldt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2)) \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot [(\cos(\varphi_1)\cos(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\sin(\varphi_2)) + i \cdot (\cos(\varphi_1)\sin(\varphi_2) + \sin(\varphi_1)\cos(\varphi_2))] \\ &= r_1 \cdot r_2 \cdot \left[\begin{array}{cc} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Getallenvoorbeeld

Neem $z_1 = 4 + 3i$.

Hieruit volgt: $|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ en $\arg(z_1) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = 37^\circ$.

Neem $z_2 = 2 + 2i$.

Hieruit volgt: $|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,83$ en $\arg(z_2) = \arctan\left(\frac{2}{2}\right) = 45^\circ$.

Voor het product van z_1 en z_2 geldt:

$$z_1 \cdot z_2 = (4 + 3i) \cdot (2 + 2i) = 8 + 8i + 6i + 6i^2 = 2 + 14i.$$

Hieruit volgt: $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{2^2 + 14^2} = 14,1$ en $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arctan\left(\frac{14}{2}\right) = 82^\circ$.

We zien inderdaad dat $5 \times 2,83 = 14,1$ en $37^\circ + 45^\circ = 82^\circ$.

Delen van complexe getallen

Net als bij het vermenigvuldigen gaat het delen van twee complexe getallen z_1 en z_2 ook het gemakkelijkst met poolcoördinaten. Er gelden namelijk de volgende regels.

De modulus van het quotient is gelijk aan het quotient van de moduli.

In symbolen wordt dit: $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$. (als $z_2 = 0$ is het quotient niet gedefinieerd)

Het argument van het quotient is gelijk aan het verschil van de argumenten.

In symbolen: $\arg(z_1/z_2) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

Opmerking

1)

De eigenschap van de imaginaire eenheid i is dat $i^2 = -1$. Met de besproken vermenigvuldigingsregels wordt dit inzichtelijk. De modulus van i is 1 zodat de modulus van i^2 ook gelijk is aan 1 (want $1 \times 1 = 1$). Het argument van i is 90° zodat het argument van i^2 gelijk is aan $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Zodoende komen we voor i^2 uit op -1 .

2)

Volgens de regels van het delen geldt:

$$\frac{1}{i} = -i.$$

De modulus van de breuk is namelijk 1 (want $1 / 1 = 1$). Het argument van de teller is 0° en het argument van de noemer is 90° zodat het argument van de breuk -90° is. Zodoende komen we inderdaad uit op $-i$. Overigens hadden we dit resultaat sneller gevonden door teller en noemer met i te vermenigvuldigen.

Opgaven bij § 7

Opgave 1

Schrijf de som $(3 + 5 \cdot i) + (3 + 3 \cdot i)$ als $a + b \cdot i$ (met a en b reële getallen).

Opgave 2

Werk het product $(3 + 4 \cdot i) \cdot (5 + 3 \cdot i)$ zodanig uit dat je de vorm $a + b \cdot i$ krijgt.

Opgave 3

Bereken de modulus en het argument van $4 + 7 \cdot i$.

Opgave 4

Bereken het reële en het imaginaire deel van het complexe getal dat 14 als modulus en 30° als argument heeft.

Opgave 5

In deze opgave geldt: $z_1 = 2 + 2 \cdot i$ en $z_2 = 4 + 2 \cdot i$.

a.

Bepaal van z_1 de modulus en het argument.

b.

Bepaal van z_2 de modulus en het argument.

c.

Bepaal van $z_1 \cdot z_2$ de modulus en het argument. Maak daarbij gebruik van je antwoorden op vraag a. en b.

d.

Bepaal van $z_1 \cdot z_2$ opnieuw de modulus en het argument maar nu zonder gebruik te maken van je antwoorden op vraag a. en b. Controleer of de gevonden waarden hetzelfde zijn als die bij vraag c.

Opgave 6

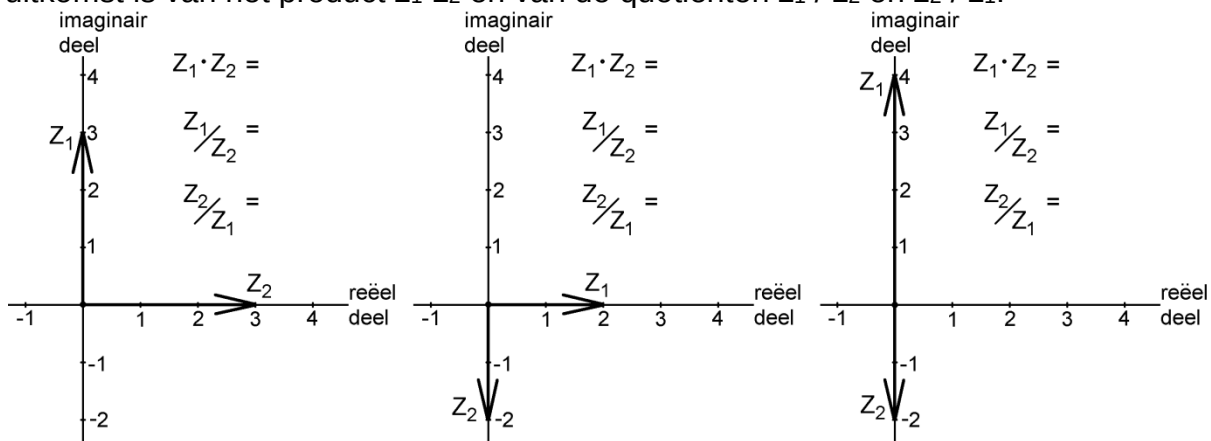
Complex getal z_1 heeft modulus 7,2 en argument 65° .

Complex getal z_2 heeft modulus 3,0 en argument 35° .

Bereken de modulus en het argument van de breuk z_1 / z_2 . Schrijf deze breuk vervolgens in de vorm $a + b \cdot i$ waarbij a en b reële getallen zijn.

Opgave 7

In de onderstaande drie complexe vlakken zijn steeds twee complexe getallen z_1 en z_2 aangegeven. Geef in alle drie de complexe vlakken aan wat de numerieke uitkomst is van het product $z_1 \cdot z_2$ en van de quotiënten z_1 / z_2 en z_2 / z_1 .



Opgave 8

In de volgende uitdrukking zijn a en b reële getallen.

Leg uit dat de uitkomst van $(a + b \cdot i) \cdot (a - b \cdot i)$ reëel moet zijn.

Opgave 9

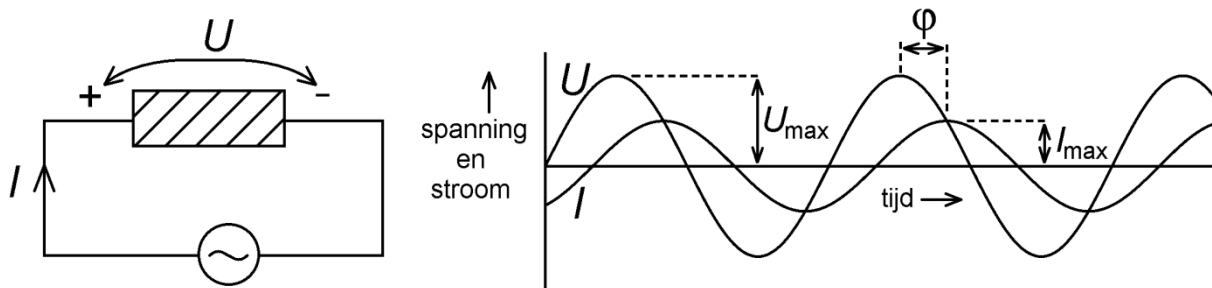
Werk de breuk $\frac{2 + 6 \cdot i}{3 + 4 \cdot i}$ zodanig uit dat je de vorm $a + b \cdot i$ krijgt.

Tip: vermenigvuldig teller en noemer eerst met $(3 - 4 \cdot i)$.

§ 8 Complexe impedantie

Complexe impedantie

In de onderstaande linker figuur is een willekeurige combinatie van weerstanden, spoelen en condensatoren op een spanningsbron aangesloten. Deze schakeling (de combinatie) is als een gearceerd rechthoekig blokje weergegeven. De spanning U over de schakeling en de stroom I door de schakeling zijn sinusvormig. In de rechter figuur is het tijdsverloop van U en I weergegeven.



In het verleden gebruikten we twee grootheden om het verband tussen de spanning en de stroom te beschrijven, namelijk de impedantie Z en de faseverschuiving ϕ van de spanning ten opzichte van de stroom. Onder de impedantie verstonden we het quotiënt van de topwaarden (amplitudes) van de wisselspanning en de wisselstroom. Hiervoor gold dus:

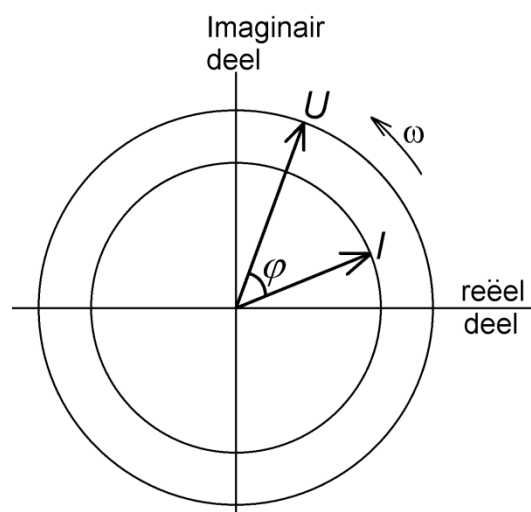
$$Z = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$$

In de huidige paragraaf stappen we over op de zogenoemde 'complexe impedantie'. Deze complexe impedantie wordt ook met Z aangegeven. De modulus van de complexe impedantie is gelijk aan de 'oude' impedantie en het argument van de complexe impedantie is gelijk aan de faseverschuiving van de spanning ten opzichte van de stroom. Voor de complexe impedantie geldt dus:

$$|Z| = \frac{U_{\max}}{I_{\max}} \text{ en } \arg(Z) = \text{faseverschuiving van } U \text{ ten opzichte van } I.$$

Complexe spanning en complexe stroom

In de wisselstroomtheorie gebruikt men naast de complexe impedantie de complexe spanning U en de complexe stroom I . De complexe spanning en de complexe stroom doorlopen in het complexe vlak een cirkel met de oorsprong als middelpunt. Zie de figuur hiernaast. De feitelijke spanning is gelijk aan het reële deel van de complexe spanning en de feitelijke stroom is gelijk aan het reële deel van de complexe stroom. Merk hierbij de grote overeenkomst op met de eerdere paragrafen waarin een harmonisch variërende grootheid in verband werd gebracht met een cirkelbeweging.



De complexe impedantie Z van een stroomgeleidend systeem wordt gedefinieerd als het quotiënt van de complexe spanning U en de complexe stroom I . Er geldt dus:

$$Z = \frac{U}{I}$$

Terwijl de complexe spanning en complexe stroom continu veranderen (ze doorlopen immers cirkels in het complexe vlak), is het quotiënt van U en I constant. In de bovenstaande figuren blijft de stand van de 'U-pijl' en 'I-pijl' ten opzichte van elkaar immers gelijk en verandert de lengte van de pijlen ook niet. De modulus van de complexe impedantie is gelijk aan de impedantie zoals we die in eerdere paragrafen zijn tegen gekomen. Het argument ϕ van de complexe impedantie geeft aan hoeveel de spanning in fase voorloopt op de stroom.

Complexe impedantie van een weerstand, spoel en condensator

Het volgende schema geeft uitdrukkingen voor de impedantie van een weerstand, een spoel en een condensator. In een eerdere paragraaf werd een soortgelijk schema gegeven maar daarin bleef het faseverschil tussen spanning en stroom buiten beschouwing. In het huidige schema bevat de uitdrukking bij een spoel een extra factor j en bij een condensator een extra factor $1/j$. Hierbij is j het symbool voor de imaginaire eenheid. Om verwarring met het symbool voor stroom te voorkomen, is de letter i door de letter j vervangen. De extra factor j bij een spoel geeft aan dat de spanning een kwart periode voorloopt op de stroom. De extra factor $1/j$ bij een condensator geeft aan dat spanning een kwart periode achterloopt op de stroom.

Weerstand: $Z_R = R$	Spoel: $Z_L = j\omega L$	Condensator: $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$
----------------------	--------------------------	--

Complexe impedanties in serie en parallel

In de onderstaande linker figuur zijn drie stroomgeleidende elementen, zoals een weerstand, spoel of condensator, in serie op elkaar aangesloten. In de rechter figuur zijn drie elementen parallel op elkaar aangesloten. De complexe impedanties van de elementen zijn Z_1 , Z_2 en Z_3 .



Voor de impedantie Z_{ser} van de serieschakeling geldt:

$$Z_{ser} = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

Voor de impedantie Z_{par} van de parallelschakeling geldt:

$$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3}$$

De bewijzen van de bovenstaande formules zijn eenvoudig.

Voor de serieschakeling geldt dat de totale spanning gelijk is aan de som van de deelspanningen: $U_{\text{totaal}} = U_1 + U_2 + U_3$.

Met de definitie van impedantie wordt dit: $I \cdot Z_{\text{ser}} = I \cdot Z_1 + I \cdot Z_2 + I \cdot Z_3$.

Alle termen delen door I geeft de te bewijzen formule.

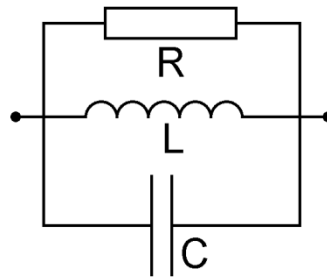
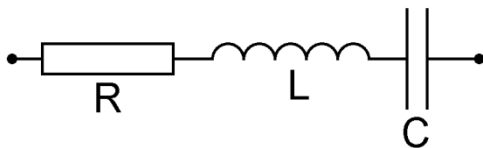
Voor de parallelschakeling geldt dat de totale stroom gelijk is aan de som van de deelstromen: $I_{\text{totaal}} = I_1 + I_2 + I_3$.

Met de definitie van impedantie wordt dit: $\frac{U}{Z_{\text{par}}} = \frac{U}{Z_1} + \frac{U}{Z_2} + \frac{U}{Z_3}$.

Alle termen delen door U geeft de te bewijzen formule.

Voorbeelden van het gebruik van complexe impedanties

Hieronder zijn een serie- en een parallelschakeling afgebeeld met weerstanden, condensatoren en spoelen. Van deze schakelingen stellen we een uitdrukking voor de impedantie op.



Laten we eerst naar de linker schakeling kijken. Voor de totale impedantie geldt:

$$Z_{\text{ser}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}.$$

Deze vergelijking bevat precies dezelfde informatie als de twee vergelijkingen in het eerste kader (getekende rechthoek) van paragraaf 5. De bovenstaande vergelijking is echter veel korter en inzichtelijker.

We kunnen het ons gemakkelijk maken door ons te beperken tot hoge of juist lage frequenties. Als de hoekfrequentie ω bijvoorbeeld zeer hoog is, speelt de tweede term van het rechter lid een overheersende rol en kunnen we de impedantie van de weerstand ($= R$) en van de condensator ($= 1/j\omega C$) weglaten. Er geldt dan bij benadering:

$$Z_{\text{ser}} = j\omega L.$$

Dit resultaat is logisch want de spoel is voor hoge frequenties een isolator en is dus bepalend voor het doorlaten van de stroom (bedenk hierbij dat het om een serieschakeling gaat).

Voor minder hoge frequenties speelt de weerstand ook een rol. Als we aannemen dat de condensator nog steeds als een kortsluiting kan worden opgevat, geldt bij benadering voor de totale impedantie:

$$Z_{\text{ser}} = R + j\omega L.$$

Voor de modulus van de totale impedantie geldt dan:

$$|Z_{ser}| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}.$$

Voor het argument van de totale impedantie geldt dan:

$$\tan(\varphi) = \frac{\omega L}{R}.$$

Laten we nu naar de rechter schakeling kijken. Voor de totale impedantie geldt:

$$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C.$$

Deze vergelijking bevat precies dezelfde informatie als de twee vergelijkingen in het tweede kader (getekende rechthoek) van paragraaf 5. De bovenstaande vergelijking is echter veel korter en inzichtelijker.

We kunnen het ons gemakkelijk maken door ons te beperken tot hoge of juist lage frequenties. Als de hoekfrequentie ω bijvoorbeeld zeer hoog is, speelt de derde term een overheersende rol. Voor de totale impedantie geldt dan:

$$\frac{1}{Z_{par}} = j\omega C \quad \text{en dus} \quad Z_{par} = \frac{1}{j\omega C}.$$

Dit resultaat is logisch want de condensator is voor hoge frequenties (bijna) een kortsluiting en is dus bepalend voor het doorlaten van de stroom (bedenk hierbij dat het om een parallelschakeling gaat).

Voor minder hoge frequenties speelt de weerstand ook een rol. Als we aannemen dat de spoel nog steeds als een isolator kan worden opgevat, geldt bij benadering voor de totale impedantie:

$$\frac{1}{Z_{par}} = \frac{1}{R} + j\omega C.$$

Deze vergelijking kan worden herschreven tot:

$$Z_{par} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Voor de modulus van deze impedantie geldt:

$$|Z_{par}| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Bedenk hierbij dat de modulus van een breuk gelijk is aan de modulus van de teller gedeeld door de modulus van de noemer. De modulus van de teller (hier R) is gelijk aan R . De modulus van de noemer (hier $1 + j\omega RC$) is gelijk aan $\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}$.

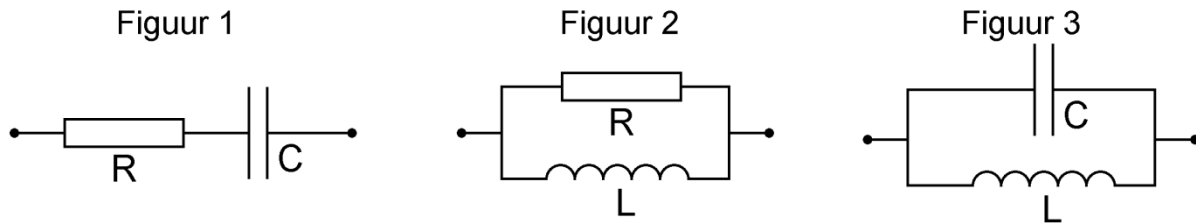
Voor het argument van de impedantie geldt:

$$\tan(\varphi) = -\omega RC.$$

Bedenk hierbij dat het argument van een breuk gelijk is aan het argument van de teller minus het argument van de noemer. Het argument van de teller (hier R) is 0° . Voor het argument van de noemer (hier $1 + j\omega RC$) geldt: $\tan(\varphi) = \omega RC$.

Opgaven bij § 8

De onderstaande figuren 1, 2 en 3 horen bij de opgaven 1, 2 en 3.



Opgave 1

In figuur 1 staan een weerstand en een condensator in serie met elkaar.

a.

Toon aan dat voor de impedantie van de serieschakeling geldt: $Z_{ser} = R - \frac{1}{\omega C} \cdot j$.

b.

Stel een uitdrukking op voor de modulus van de impedantie.

c.

Stel een uitdrukking op voor het argument van de impedantie.

d.

Leg met de uitdrukking voor de modulus van de impedantie uit dat de wisselstroom bij lage frequenties moeilijk door de stroomkring kan lopen. Overigens wisten we dit al omdat een condensator bij lage frequenties een isolator is.

Opgave 2

In figuur 2 staan een weerstand en een spoel parallel met elkaar.

a.

Toon aan dat voor de impedantie van de parallelschakeling geldt: $Z_{par} = \frac{R}{1 - j \frac{R}{\omega L}}$.

b.

Wat is de modulus van de teller in de te bewijzen formule in vraag a?

c.

Geef een uitdrukking voor de modulus van de noemer in de formule in vraag a.

d.

Geef een uitdrukking voor de modulus van de impedantie van de parallelschakeling. Gebruik daarbij je antwoorden op vraag b. en c.

e.

Wat is het argument van de teller in de te bewijzen formule in vraag a?

f.

Geef een uitdrukking voor het argument van de noemer in de formule in vraag a.

g.

Geef een uitdrukking voor het argument van de impedantie van de parallelschakeling. Gebruik daarbij je antwoorden op vraag e. en f.

h.

De te bewijzen formule in vraag a kan voor hoge frequenties vereenvoudigd worden door één term in de noemer weg te laten. Geef deze vereenvoudigde uitdrukking. Kun je dat ook fysisch begrijpen?

Opgave 3

In figuur 3 staan een spoel en een condensator parallel met elkaar.

a.

Bewijs dat voor de impedantie van de parallelschakeling geldt: $Z_{par} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$.

b.

Leg uit dat bij kleine hoekfrequenties (kleine ω dus) de impedantie van de parallelschakeling vereenvoudigd kan worden tot de impedantie van de spoel.
Leg vervolgens uit hoe je dat fysisch kunt begrijpen.

c.

Laat zien dat bij grote hoekfrequenties (grote ω dus) de impedantie van de parallelschakeling vereenvoudigd kan worden tot de impedantie van de condensator.
Leg vervolgens uit hoe je dat fysisch kunt begrijpen.

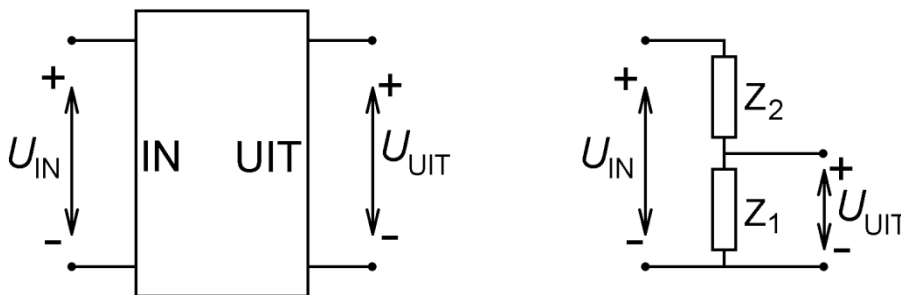
d.

Bij één frequentie wordt de (modulus van de) impedantie van de parallelschakeling oneindig groot en spreken we van parallelresonantie. Bij welke frequentie is dat?

§ 9 Filters

Filter

Een filter in de elektronica is een elektrische schakeling die een gedeelte van het frequentiespectrum van een signaal verzwakt en/of de fase verandert. Bijvoorbeeld onderdrukt een hoogdoorlaatfilter de lage frequenties en onderdrukt een laagdoorlaatfilter de hoge frequenties. Een filter wordt onder andere gebruikt bij de toonregeling van een geluidsversterker. Een filter bevat een ingang en een uitgang en wordt schematisch in de onderstaande linker figuur weergegeven. De ingangsspanning wordt aangeduid met U_{IN} en de uitgangsspanning met U_{UIT} .



In deze paragraaf beperken we ons tot filters die een opbouw hebben zoals in de rechter figuur is weergegeven. Hierin stellen Z_1 en Z_2 in het algemeen stroomgeleidende systemen voor die kunnen bestaan uit weerstanden, spoelen en condensators. In de gehele paragraaf gaan we ervan uit dat er aan de uitgang van het filter geen belasting is aangesloten, zodat de uitgangsstroom nul is. Dat houdt in dat de elektrische stroom door Z_1 gelijk is aan die door Z_2 .

De overdracht van een filter

We bekijken het gedrag van een filter bij harmonische signalen. We werken met complexe spanningen, complexe stromen en complexe impedanties.

Onder de overdracht H van een filter verstaan we het quotiënt van de uitgangsspanning U_{UIT} en de ingangsspanning U_{IN} . In formulevorm geldt:

$$H = \frac{U_{UIT}}{U_{IN}}$$

Op basis van de rechter figuur kunnen we de overdracht uitdrukken in Z_1 en Z_2 . We nemen daarbij aan dat de stroom I door Z_1 en Z_2 gelijk is.

Voor de ingangsspanning geldt: $U_{IN} = I \cdot (Z_1 + Z_2)$.

Voor de uitgangsspanning geldt: $U_{UIT} = I \cdot Z_1$.

Bij de in de figuur getekende polariteiten van de spanningen geldt dan voor de overdracht:

$$H = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Bij het hierna te bespreken laag- en hoogdoorlaatfilter zal deze formule worden toegepast.

Laag- en hoogdoorlaatfilter

De onderstaande linker figuur toont een eenvoudig laagdoorlaatfilter en de rechter figuur een eenvoudig hoogdoorlaatfilter. In beide figuren is een signaalgenerator op de ingang aangesloten en een spanningsmeter op de uitgang. Deze meter bezit een zo grote impedantie dat de uitgang van het filter hierdoor niet wordt belast. De signaalgenerator levert een harmonisch met de tijd variërende spanning. Met een instelknop kan de frequentie gevarieerd worden.



Bij het laagdoorlaatfilter verschijnen de hoge frequenties niet of nauwelijks aan de uitgang en zal de spanningsmeter een kleine waarde aangeven. In de schakeling is dat logisch als je bedenkt dat een condensator bij hoge frequenties een kortsluiting is. Bij een hoogdoorlaatfilter verschijnen juist de lage frequenties niet of nauwelijks aan de uitgang. In de schakeling is dat logisch als je bedenkt dat een condensator bij lage frequenties een isolator is en dat de uitgang dan als het ware losgekoppeld is van de ingang.

De overdracht van een laagdoorlaatfilter

Als we de bovenstaande formule toepassen op het laagdoorlaatfilter, vinden we:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C} + R}.$$

Dit kan herschreven worden tot:

$$H = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

We zien dat H wordt uitgedrukt in de vorm van een breuk, waarvan de teller gelijk is aan 1 en waarbij de noemer een imaginair deel bevat dat lineair met de frequentie toeneemt. Voor lage frequenties is ωRC klein ten opzichte van 1 en geldt er bij benadering: $H = 1$. De uitgangsspanning is dan even groot als de ingangsspanning; bovendien zijn beide spanningen in fase met elkaar.

Voor hoge frequenties is ωRC groot ten opzichte van 1 en geldt er bij benadering: $H = 1/(j\omega RC)$. De uitgangsspanning is dan (veel) kleiner dan de ingangsspanning en loopt bovendien bij benadering een kwart periode achter op de ingangsspanning (dit kun je zien aan de factor j in de noemer).

De overdracht van een hoogdoorlaatfilter

Als we de bovenstaande formule toepassen op het hoogdoorlaatfilter, vinden we:

$$H = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Dit kan herschreven worden tot:

$$H = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Merk op dat deze formule dezelfde noemer heeft als de overdracht die hoort bij een laagdoorlaatfilter. Bij hoge frequenties (ωRC veel groter dan 1) is de noemer bij benadering gelijk aan $j\omega RC$ en geldt dus: $H = 1$. De uitgangsspanning is dan even groot als de ingangsspanning en is er bovendien mee in fase.

Voor lage frequenties (ωRC veel kleiner dan 1) is de noemer bij benadering gelijk aan 1 en geldt er: $H = j\omega RC$. De uitgangsspanning is dan (veel) kleiner dan de ingangsspanning en loopt bovendien bij benadering een kwart periode voor op de ingangsspanning (dit volgt uit de factor j in de teller van de uitdrukking voor H).

Kantelfrequentie bij laag- en hoogdoorlaatfilters

Bij de filters in deze paragraaf geldt:

$$H = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Bij laag- en hoogdoorlaatfilters is er enerzijds een gebied van frequenties die (redelijk) goed worden doorgelaten en anderzijds een gebied van frequenties die min of meer worden gesperd. In het doorlaatgebied is de modulus van Z_2 verwaarloosbaar ten opzichte van de modulus van de Z_1 . Er geldt dan bij benadering $H = 1$. Bij het spergebied is de modulus van Z_1 verwaarloosbaar ten opzichte van de modulus van de Z_2 . Er geldt dan bij benadering $H = Z_1/Z_2$. In het overgangsgebied tussen doorlaten en sperren hebben de moduli van Z_1 en Z_2 dezelfde orde van grootte.

Bij laag- en hoogdoorlaatfilters wordt vaak over de kantelfrequentie gesproken. Deze vormt globaal de scheiding tussen het doorlaatgebied en het spergebied.

Kenmerkend voor de kantelfrequentie is dat de modulus van Z_1 gelijk is aan de modulus van Z_2 . In de hierboven behandelde laag- en hoogdoorlaatfilters is de modulus van R dan gelijk aan de modulus van $1/(j\omega C)$. Hieruit volgt:

$$\omega = \frac{1}{RC}.$$

Hieruit volgt voor de kantelfrequentie:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}.$$

Stel bijvoorbeeld dat bij een laagdoorlaatfilter geldt: $R = 1 \text{ k}\Omega$ en $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$.

Voor de kantelfrequentie geldt dan:

$$f = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \cdot 10^3 \cdot 10^{-7}} = 1,6 \text{ kHz}.$$

Als we bij de kantelfrequentie de voorwaarde $\omega = 1/(RC)$ substitueren in de formule voor de overdracht, vinden we bij het laagdoorlaatfilter respectievelijk hoogdoorlaatfilter de onderstaande uitdrukkingen.

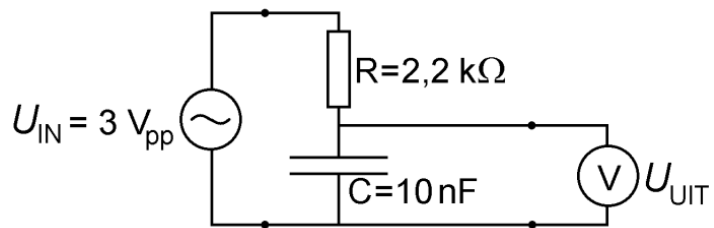
$$H = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j} \quad \text{en} \quad H = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j}{1 + j}$$

We zien dat bij beide filters de modulus van de overdracht dan gelijk is aan $1/\sqrt{2}$. Voor het argument van de overdracht vinden we $\varphi = -45^\circ$ respectievelijk $\varphi = 45^\circ$.

Opgaven bij § 9

Opgave 1

In de figuur hiernaast is een filter afgebeeld. Aan de ingang wordt een harmonisch variërende wisselspanning aangeboden met een piek-piek-spanning van 3 V.



a.

Leg kort uit hoe je eenvoudig kunt zien dat de schakeling een laagdoorlaatfilter is.

b.

Toon aan dat voor de overdracht H geldt: $H = \frac{1}{1 + j\omega RC}$.

c.

Geef de uitdrukking van de overdracht (als functie van de hoekfrequentie ω) bij de gegeven waarden van R en C .

d.

Toon aan dat voor de kantelfrequentie geldt: $f = \frac{1}{2\pi RC}$.

e.

Bereken de kantelfrequentie bij de gegeven waarden van R en C .

f.

Leg uit dat bij een frequentie van 100 kHz de uitgangsspanning veel kleiner is dan de ingangsspanning. Gebruik daarbij je antwoord op vraag e.

g.

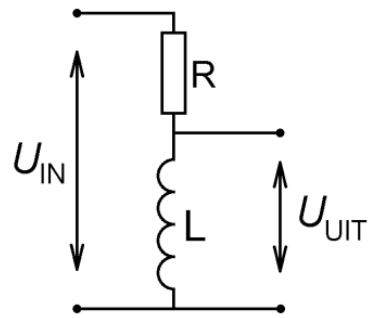
Bereken bij benadering hoe groot de uitgangsspanning (piek-piek) is bij 100 kHz.

Opgave 2

In de figuur hiernaast is een filter afgebeeld met weerstand R en spoel L .

a.

Beredeneer of het om een laag- of een hoogdoorlaatfilter gaat.



b.

Vind de formule voor de overdracht H waarbij deze is uitgedrukt in R en L .

c.

Hoe kunnen we deze formule bij hoge frequenties in goede benadering vereenvoudigen? Leg dit resultaat uit door naar het gedrag van een spoel bij hoge frequenties te kijken.

d.

Hoe kunnen we deze formule bij lage frequenties in goede benadering vereenvoudigen?

e.

Wat kun je zeggen over het faseverschil tussen de uitgangsspanning en de ingangsspanning bij lage frequenties?

f.

Vind een uitdrukking voor de kantelfrequentie.

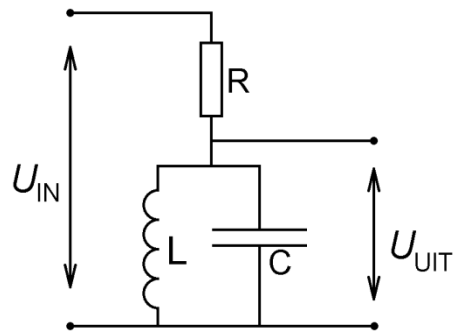
Opgave 3

In de figuur hiernaast is een filter afgebeeld waarbij slechts één frequentie onverzwakt wordt doorgelaten.

a.

Toon aan dat voor de impedantie van de parallelschakeling van de spoel en de condensator geldt:

$$Z = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}.$$



b.

Toon aan dat voor de overdracht H van het filter geldt:

$$H = \frac{j\omega L}{j\omega L + R - \omega^2 RLC}$$

c.

Leg aan de hand van de formule voor H (zie vraag b) uit dat er voor slechts één frequentie geldt: $H = 1$ en dat voor alle andere frequenties de modulus van H kleiner is dan 1. Bij welke frequentie geldt $H = 1$?